

---

01 Jan 1993

## Simulation de l'interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilite des profils a froid par une combinaison de la methode des largeurs effectives et de l'element fini non-lineaire de poutre spatiale

Luiz Felipe Estrella Jr.

Follow this and additional works at: <https://scholarsmine.mst.edu/ccfss-library>



Part of the [Structural Engineering Commons](#)

---

### Recommended Citation

Estrella, Luiz Felipe Jr., "Simulation de l'interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilite des profils a froid par une combinaison de la methode des largeurs effectives et de l'element fini non-lineaire de poutre spatiale" (1993). *Center for Cold-Formed Steel Structures Library*. 74.  
<https://scholarsmine.mst.edu/ccfss-library/74>

This Technical Report is brought to you for free and open access by Scholars' Mine. It has been accepted for inclusion in Center for Cold-Formed Steel Structures Library by an authorized administrator of Scholars' Mine. This work is protected by U. S. Copyright Law. Unauthorized use including reproduction for redistribution requires the permission of the copyright holder. For more information, please contact [scholarsmine@mst.edu](mailto:scholarsmine@mst.edu).

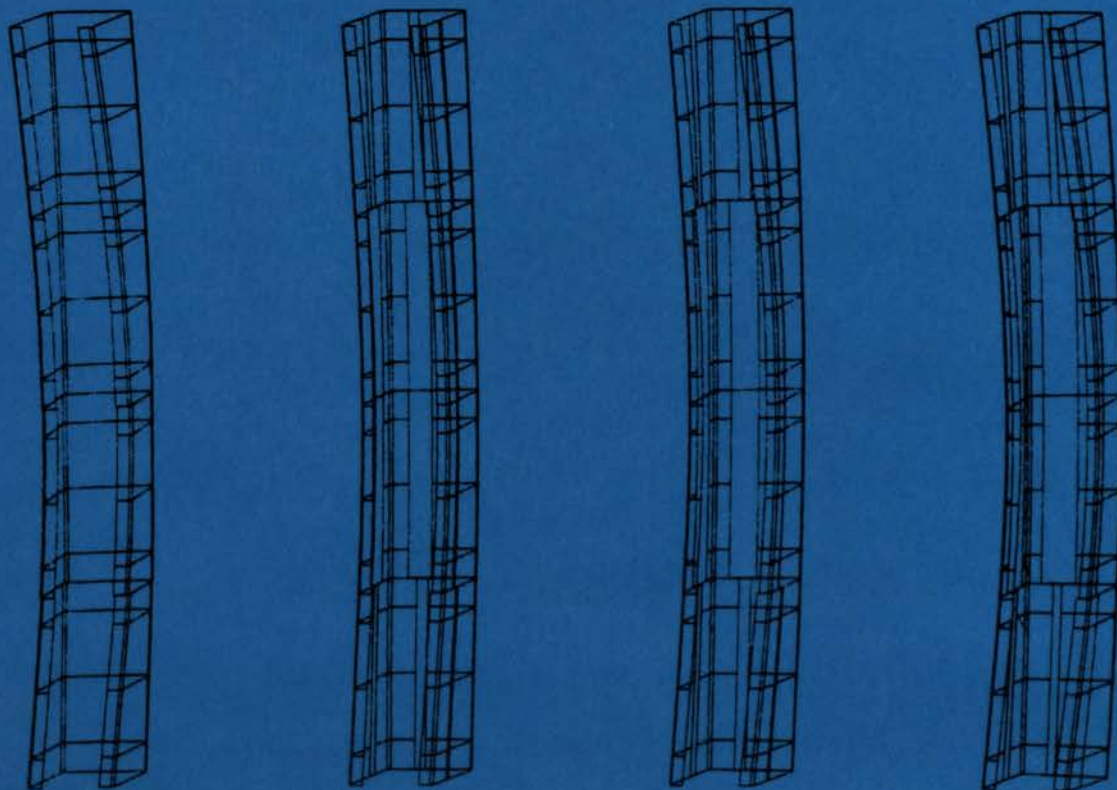
**UNIVERSITE DE LIEGE**  
Faculté des Sciences Appliquées

**SIMULATION DE L'INTERACTION ENTRE LE VOILEMENT  
LOCAL ET LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE DES  
PROFILS A FROID PAR UNE COMBINAISON DE LA  
METHODE DES LARGEURS EFFECTIVES ET DE  
L'ELEMENT FINI NON-LINEAIRE DE POUTRE SPATIALE**

par

**Luiz Felipe ESTRELLA Júnior**

M. Sc. en Génie Civil de Structures  
de la Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro



Thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique  
de Docteur en Sciences Appliquées

**Année académique 1992 - 1993**

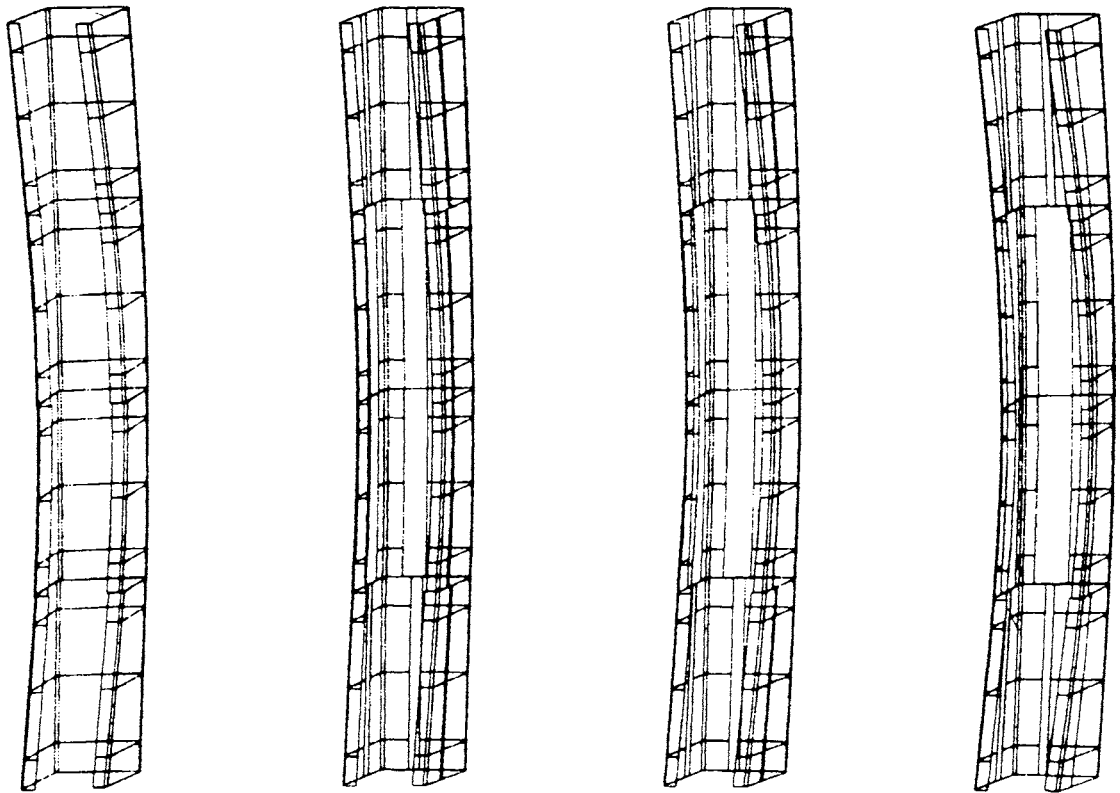
**UNIVERSITE DE LIEGE**  
Faculté des Sciences Appliquées

**SIMULATION DE L'INTERACTION ENTRE LE VOILEMENT  
LOCAL ET LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE DES  
PROFILS A FROID PAR UNE COMBINAISON DE LA  
METHODE DES LARGEURS EFFECTIVES ET DE  
L'ELEMENT FINI NON-LINEAIRE DE POUTRE SPATIALE**

par

**Luiz Felipe ESTRELLA Júnior**

M. Sc. en Génie Civil de Structures  
de la Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro



Thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique  
de Docteur en Sciences Appliquées

**Année académique 1992 - 1993**

# TABLE DE MATIERES

<b>REMERCIEMENTS</b>	V
<b>RESUME</b>	VI
<b>ABSTRACT</b>	VII
<b>NOTATIONS</b>	VIII
<b>CHAPITRE 1: INTRODUCTION</b>	
1.1. GENERALITES	1.1
1.2. OBJECTIFS DE LA THESE	1.3
<b>CHAPITRE 2: STABILITE ET RUINE DE PLAQUES</b>	
2.1. STABILITE DE PLAQUES	2.1
2.1.1. Introduction	2.1
2.1.2. La bifurcation d'équilibre	2.3
2.1.3. Le comportement post-critique	2.9
2.2. UNE APPROCHE SEMI-EMPIRIQUE DU COMPORTEMENT POST-CRITIQUE DES PLAQUES	2.13
2.2.1. Généralités	2.13
2.2.2. Plaque dont les bords sont simplement appuyés	2.16
2.2.3. Plaque avec trois simplement appuyés et un bord libre	2.20
2.2.4. Cas de charge de compression uniformément variable	2.22
2.3. LE COMPORTEMENT SOUS-ULTIME DE PLAQUES	2.26
2.4. STABILITE DE SECTIONS OU DE PLAQUES ASSOCIEES	2.36
2.4.1. Généralités	2.36
2.4.2. La cornière	2.40
2.4.3. La section de type 'U'	2.42
2.4.4. La section de type 'C'	2.45
2.5. LES NORMES ET DES ADAPTATIONS POUR LE CALCUL DE LARGEURS EFFECTIVES DANS LE PROGRAMME DE L'ELEMENT FINI	2.49
2.5.1. Introduction	2.49



2.5.2. Plaque dont les bords sont simplement appuyés	2.49
2.5.3. Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre	2.57
2.5.4. Traitement du raidisseur du profil 'C'	2.61
2.5.4.1. Selon l'AISI-90	2.61
2.5.4.2. Selon l'Eurocode 3	2.68
2.6. LA LARGEUR EFFECTIVE DANS L'ELEMENT FINI	2.72
2.6.1. Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre	2.72
2.6.2. Eurocode 3	2.74
2.6.3. AISI-90	2.74
2.6.4. AISI-90*	2.75
2.6.5. Proposition A	2.75
2.6.6. Proposition B	2.76
2.7. LA LARGEUR EFFECTIVE EN PLASTICITE	2.76

### **CHAPITRE 3: L'INTERACTION ENTRE LE VOILEMENT LOCAL ET LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE**

3.1. DESCRIPTION DU PHENOMENE	3.1
3.2. LES METHODES DE CALCUL DES COLONNES CONSTITUEES PAR DES PROFILS A PAROIS MINCES	3.9
3.3. LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE	3.12
3.3.1. Introduction	3.12
3.3.2. Stabilité de colonnes	3.12
3.3.2.1. Cas particulier: sections à un axe de symétrie avec charge appliquée sur cet axe	3.22
3.3.3. Les instabilités couplées	3.26
3.4. LES METHODES DE DIMENSIONNEMENT SEMI-EMPIRIQUES DE L'EUROCODE 3 ET DE L'AISI-90	3.28

### **CHAPITRE 4: L'ELEMENT FINI DE POUTRE SPATIALE**

4.1. INTRODUCTION	4.1
4.2. LA DESCRIPTION COROTATIONNELLE TOTALE	4.1
4.3. L'ELEMENT FINI DE de VILLE	4.4
4.3.1. Les hypothèses	4.4
4.3.2. Le champ de déplacements	4.4
4.3.2.1. La discrétisation	4.5
4.3.3. Les tenseurs de déformations et de contraintes	4.8

4.3.4. Les efforts internes énergétiquement équivalents	4.9
4.3.5. La matrice de rigidité tangente	4.11
4.3.6. La matrice de connexion	4.13
4.3.7. Les caractéristiques géométriques en torsion	4.17
4.3.7.1. La fonction de gauchissement	4.17
4.3.7.2. L'inertie en torsion	4.19
4.3.8. La plasticité	4.21
4.4. L'ELEMENT FINI A SECTION TRANSVERSALE VARIABLE	4.21
4.4.1. La variation de la section transversale	4.21
4.4.2. Actualisation de la matrice de rotation et de la déformée courante	4.24
4.4.3. Correction de la matrice de rotation et de la déformée courante	4.29
4.4.4. Les caractéristiques géométriques	4.31
4.4.5. Organigramme de calcul	4.34
4.5. UN TEST NUMERIQUE - LE CADRE DE LEE	4.35

## **CHAPITRE 5: RESULTATS**

5.1. INTRODUCTION	5.1
5.2. CORNIERE	5.4
5.2.1. Introduction	5.4
5.2.2. Tronçon court	5.5
5.2.3. Tronçon long	5.7
5.2.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine	5.13
5.3. PROFIL U	5.21
5.3.1. Introduction	5.21
5.3.2. Tronçon court	5.22
5.3.3. Tronçon long	5.26
5.3.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine	5.34
5.4. PROFIL C	5.38
5.4.1. Introduction	5.38
5.4.2. Tronçon court	5.43
5.4.3. Tronçon long	5.47
5.4.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine	5.59
5.5. CONCLUSIONS	5.66

## **CHAPITRE 6: CONCLUSIONS**

6.1. BILAN DE LA THESE	6.1
6.2. QUELQUES REMARQUES FINALES	6.2

## **BIBLIOGRAPHIE**

## **ANNEXE A - DIAGRAMMES DE CHARGE X RACCOURCISSEMENT DES TRONÇONS COURTS**

## REMERCIEMENTS

Avant toutes choses, je tiens à exprimer ma gratitude au Père Celeste qui m'a soutenu l'esprit durant ces dernières années. Il a guidé tous mes pas afin de ne pas me laisser tomber dans le chemin que j'ai parcouru pour faire cette thèse. Son Intelligence Suprême m'a aussi inspiré par intuition les démarches techniques et les bonnes idées que j'ai incorporées à cette thèse, à la fois minuscule et grande, car elle est comparable à une goutte de l'eau de mer au milieu de l'océan, devant la plus grande oeuvre d'art qui est toute la nature créée par Lui.

Au grand ami que j'ai rencontré sur le chemin de ma vie, le professeur Paulo BATISTA Gonçalves de la Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, qui après avoir guidé très soigneusement l'avancement de ma Thèse de Maîtrise, m'a indiqué l'Université de Liège en Belgique, pour sa grande réputation, pour faire ce doctorat. Ce désir a pu se concrétiser grâce à la confiance que le professeur Jacques RONDAL m'a accordée et à une bourse donnée par le Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq). A tous les deux, un grand merci.

Aux professeurs Jacques RONDAL et Vincent de VILLE, pour leur soutien technique et amical lors des nombreux problèmes qui ne manquent jamais de poser à un doctorant et pour avoir accepté la tâche bien ingrate de corriger l'orthographe et la grammaire du mémoire.

Au professeur Serge CESCOTTO sur qui j'ai toujours pu compter lors de certaines difficultés spécifiques, dans son domaine de connaissance.

Aux Analystes-Programmeurs Emile LEMAIRE et Pierre VILLERS, ma gratitude pour leur aide compétente et généreuse dans le domaine de l'informatique.

A tous les scientifiques dont les recherches et les découvertes ont contribué au développement de cette thèse.

A mon amie Nuggy, pour la joie et la chance qu'elle m'a apportées durant ces dernières années.

A mon épouse Vivien, qui a dédié quatre ans de sa vie, loin de sa famille et de ses études, pour m'accompagner et me soutenir dans ce doctorat. Je ne peux pas oublier de mentionner combien de fois elle m'a encouragé à avancer dans le travail de cette thèse. Je tiens à lui dire, merci.

A mes enfants Felipe et Daniela, dont l'existence est déjà, par elle-même, source d'encouragement.

Luiz Felipe ESTRELLA Júnior

## RESUME

Le sujet de cette thèse est l'étude de la stabilité des profils en acier fabriqués à froid et à parois minces. L'interaction entre les phénomènes d'instabilité globale et le voilement local des parois du profil exerce un effet réducteur sur la charge de ruine. Le but est de développer un outil numérique capable non seulement de fournir une bonne estimation de la charge de ruine, mais aussi de fournir le chemin d'équilibre. Dans ce but, on a utilisé l'élément fini non-linéaire de poutre spatiale développé originalement par Vincent de Ville à l'Université de Liège. Le profil métallique est considéré comme constitué par une association de plaques et d'arrondis. La modélisation du voilement est faite par la méthode des largeurs effectives de plaques. A chaque itération du pas de calcul non-linéaire, on recalcule les largeurs effectives de chaque plaque du profil pour l'état de contraintes actualisé de l'élément fini. Ces largeurs effectives composent la nouvelle section effective de l'élément fini. Comme on peut voir, la section transversale de l'élément fini est variable à chaque itération. Ainsi, des opérations supplémentaires ont dû être développées pour tenir compte du changement des caractéristiques géométriques de la section et du changement de la position du centre de gravité, de l'orientation des axes principaux d'inertie, de l'aire, de l'inertie en flexion, etc. La méthode utilisée pour la solution du problème linéaire est le pas sphérique avec stratégie automatique de chargement.

Quant au calcul des largeurs effectives des plaques du profil, on peut distinguer deux conceptions: la première consiste à considérer les plaques du profil comme des plaques isolées tel que proposé par l'Eurocode 3 et l'AISI-90, et la deuxième consiste à tenir compte de l'interaction en voilement entre les plaques du profil au moyen de coefficients de voilement appropriés. Les profils étudiés sont la cornière et les profils avec section en U et en C. Des résultats expérimentaux de colonnes comprimées ayant les sections reprises ci-dessus sont comparés aux résultats numériques obtenus par éléments finis. Pour le profil U, seule la deuxième conception de calcul des largeurs effectives donne un bon résultat. En général, une bonne corrélation numérique-expérimental a été trouvée pour les profils étudiés.

On a aussi programmé une sortie graphique pour la visualisation de courbes charge x déplacement et pour le dessin en 3-D de charpentes métalliques discrétisées en éléments finis de poutre spatiale. Cette sortie graphique est développée sur le logiciel graphique PHIGS. Les sections programmées sont la cornière et les profils en U et en C. La structure est dessinée tel qu'elle est avec sa déformée et avec visualisation des contraintes par la couleur qui entoure les points d'intégration de l'élément fini.



# ABSTRACT

The objective of this thesis is the study of the stability of cold-formed thin-walled steel members. The interaction between global instability and local buckling of the profile walls has a reducing effect on the collapse load. The aim is to develop a numerical tool able to predict not only the collapse load, but also the equilibrium path. With this aim in view, the non-linear spatial beam finite element recently developed by Vincent de Ville in Liège University was chosen for this purpose. The steel member is considered as an association of flat plates and corners. Local buckling is modeled by means of the concept of effective width of plates. The effective widths of the plates of the cross-section are updated at each iteration of the non-linear step according to the updated stress level of the finite element. These effective widths make up the new effective section of the finite element. In this way, the cross-section of the finite element varies continuously at each iteration, so that additional features had to be developed to take into account for the changes of the mechanical properties of the section, position of the center of gravity, orientation of the principal axes, area, flexural stiffness, etc. The arc-length method was used to solve the non-linear problem.

Regarding the calculation of the effective widths, they can be calculated according to two different concepts: the former considers the plates of the section as isolated (simply supported), as it is proposed by Eurocode 3 and AISI-90; the second consists in taking into account local buckling interaction between the plates of the section by means of appropriate local buckling coefficients. Angle, channel and lipped-channel sections have been studied. Experimental results of beam-columns with the mentioned sections are compared to the numerical results found by finite elements. For channel sections only the second concept of calculation of effective widths gives a good estimation of the collapse load. In general, a good correlation between experimental and numerical results has been found for the sections studied.

A graphical output has also been developed for plotting curves of load versus displacement and for the visualization in 3-D of framed structures discretised with the spatial beam finite element. This graphical post-processor has been developed with PHIGS. The members are drawn as they are with their deformations and their effective sections. Stress level can be seen by the colors surrounding the integration points.

# NOTATIONS

## SIGLES

AIAA	American Institute for Aeronautics and Astronautics
AISI	American Iron and Steel Institute
ASCE	American Society of Civil Engineers
ASD	Allowable Stress Design
ASME	American Society of Mechanical Engineers
IABSE	International Association for Bridge and Structural Engineering
LRFD	Load and Resistance Factor Design
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics (actuellement NASA)

## SYMBOLES

$\bar{x}$	vecteur
$\underline{x}$	matrice
$dx$	différentielle ou incrément
$\delta x$	variation
$f_{,x}$	dérivée partielle par rapport à $x$
$f', f'', \dots$	dérivée première, seconde, ... de $f$ par rapport à $x$ (utilisée si $f$ est fonction uniquement de $x$ )
$y', z'$	coordonnées par rapport aux axes principaux d'inertie de la section effective
$\theta'$	pente de la déformée courante de l'élément fini dans les axes principaux d'inertie de la section effective
$\Gamma'_n$	configuration de référence de l'élément fini avec section effective

## ABREVIATIONS

D.C.T.	Description Corotationnelle Totale
--------	------------------------------------

## ABREVIATIONS EN INDICE

M	... de Marguerre
MM	... de Marguerre Modifié
SV	... de Saint Venant

## NOTATIONS

$a_1, a_2$	coefficients de la série d'expansion du multiplicateur de charge
$c_1, c_2$	coefficients multiplicateurs de largeur effective pour tenir compte de l'efficacité du raidisseur du profil C selon l'AISI-90
$f_{oy}, f_{oz}$	flèches initiales sinusoïdales selon les direction y et z, respectivement
$e_p$	excentricité du chargement de la plaque
$e_{xx}$	partie non linéaire de la déformation axiale
$f_y$	limite élastique de l'acier
$f_v, f_w, f_\psi$	fonctions propres du problème de stabilité de la colonne
$f(p)$	polynôme du problème de stabilité de la colonne
$h_i(x)$	fonctions interpolatrices
$k$	coefficient de voilement de plaque
$k_1, k_2, k_3$	coefficients de voilement des plaques de la section
$k_{11}, k_{22}, k_{13}, k_{31}, k_{23}, k_{32}, k_{33}$	coefficients de la matrice D liée au problème de stabilité de la colonne
$k_{min}$	coefficient de voilement minimum
$k_y$	coefficient adimensionnel de calcul de la charge de ruine de plaques
$m$	nombre de demi-ondes longitudinales
$n$	nombre de demi-ondes transversales
$p_i, \underline{p}$	inconnues nodales, déplacements nodaux
$q$	déplacements généralisés
$q_1, q_2$	coefficients de la série d'expansion des déplacements généralisés
$u, v, w$	déplacements
$[u, v, w]_{(x)}$	champ de déplacements continus de l'élément fini
$w_0$	imperfection géométrique initiale de la plaque

$(x,y,z)$	axes locaux
$(x',y',z')$	axes locaux de l'élément fini avec la section effective
$A_1, A_2, A_3, A_4$	coefficients de $f(p)$
$A_{K1}, A_{K2}, A_{K3}, A_{K4}$	coefficients de la proposition de Mulligan pour le calcul de la largeur effective avec la ruine définie par Kalyanaraman
$A_{r1}, A_{r2}, A_{r3}, A_{r4}$	coefficients de l'adaptation de la répartition de largeur effective de l'AISI-90
$A_v, A_w, A_\psi$	amplitudes de fonctions propres
$A_{W1}, A_{W2}, A_{W3}, A_{W4}$	coefficients de la proposition de Mulligan pour le calcul de la largeur effective avec la ruine définie par Winter
$B_{\omega i}$	bi-moment nodal énergétiquement équivalent
<u>C</u> , <u>CONEC</u>	matrice de connexion
$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	raideur en flexion de la plaque
D	matrice 3x3 du problème de stabilité de la colonne
$D_{ijkl}$	loi constitutive dans la forme incrémentielle
E	module d'élasticité longitudinal
$E^*$	raideur de la plaque en régime post-critique
$E_{ij}$	tenseur de déformations de Green
F	fonction de contraintes d'Airy
G	module d'élasticité transversal
$\underline{K}_0$	matrice de rigidité infinitésimale
$\underline{K}_{SMM}$	matrice des contraintes initiales
$\underline{K}_t$	matrice tangente
$\underline{K}_{UMM}$	matrice proportionnelle à la déformée courante
$\underline{K}_{U2MM}$	matrice proportionnelle au carré de la déformée courante
$M_{o,Rn}$	moment résistant nominal
$M_{o,Rd}$	moment résistant de dimensionnement
$M_b$	moment réduit de déversement selon l'AISI-90
$M_{cr}$	moment critique de déversement

$M_{LT,Rn}$	moment nominal résistant au déversement
$M_{LT,Rd}$	moment de dimensionnement au déversement
$M_{Sd}$	moment de dimensionnement du au chargement
$M'_{Sd}$	moment de dimensionnement par rapport au centre de gravité de la section effective
$M_{ti}, T_{yi}, T_{zi}$	moments nodaux énergétiquement équivalents
$M_y = W \cdot f_y$	moment plastique
$M_{y,Sd}$	
$M_{yo,Rn}, M_{yo,Rd}$	moments autour de l'axe y
$M_{yLT,Rn}, M_{yLT,Rd}$	
$M_{z,Sd}$	
$M_{zo,Rn}, M_{zo,Rd}$	moments autour de l'axe z
$M_{zLT,Rn}, M_{zLT,Rd}$	
$N_i, T_{yi}, T_{zi}$	forces nodales énergétiquement équivalentes
$P$	charge de compression
$P_{cr}$	charge critique de flambement global
$P_{cr,s}$	charge critique de voilement de la section
$P_f$	charge critique de flambement par flexion
$P_{f,y}$	charge critique de flambement par flexion dans le plan xy
$P_{f,z}$	charge critique de flambement par flexion dans le plan xz
$P_{ft}, P_{ft1}, P_{ft2}$	charge critique de flambement par flexion-torsion
$P_i, \underline{P}$	efforts internes énergétiquement équivalents
$P_{Rn}$	résistance nominale à la compression
$P_{Rd}$	résistance de dimensionnement à la compression
$P_{Sd}$	charge de compression de dimensionnement
$P_{ruine}$	charge de ruine
$P_r$	charge de ruine numérique
$P_{exp}$	charge de ruine expérimentale
$P_{TC}$	charge de ruine d'un tronçon court à parois minces
$P_t$	charge critique de flambement par torsion



$P_y$	charge de ruine d'un tronçon court à parois épaisses
$ROT\alpha, ROT\beta, ROT\phi$ $ROT\alpha_{dif}, ROT\Gamma_n$	matrices de rotation
$S = \sigma_m / \sigma_{cr,p}$	rapport de la contrainte moyenne de compression de la plaque à la contrainte critique de la plaque
$S_{ij}$	tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff n° 2
$S_y$	même définition de S, mais pour une contrainte $\sigma_m$ qui conduit à un début de plastification aux bords non chargés de la plaque
$S = 1,28\sqrt{E/\sigma_f}$	coefficient adimensionnel utilisé dans le calcul de l'efficacité du raidisseur du C selon l'AISI-90
$S_K$	formule de largeur effective de Kalyanaraman ramenée à la forme de $S = \sigma_m / \sigma_{cr,p}$
$S_{MK}$	proposition alternative de Mulligan pour le calcul de $S_K$
$S_{MW}$	proposition alternative de Mulligan pour le calcul de $S_W$
$S_W$	formule de largeur effective de Winter ramenée à la forme $S = \sigma_m / \sigma_{cr,p}$
$[U, V, W]_{(x,y,z)}$	déplacements d'un point quelconque de l'élément fini
$U_i, V_i, W_i$	déplacements de la section nodale
$U$	énergie interne de déformation
$V$	énergie potentielle des forces extérieures
$W_{mn}$	amplitude de fonction propre du problème de stabilité de la plaque
$(X, Y, Z)$	axes globaux
$\alpha$	coefficient de la réponse post-critique de la plaque
$\alpha$	coefficient d'imperfection des courbes de flambement pour la compression
$\alpha_{LT}$	coefficient d'imperfection des courbes de flambement pour le déversement
$\alpha_{ny}, \alpha_{nz}$	coefficients d'amplification au flambement par flexion selon l'AISI-90
$\beta$	coefficient d'imperfection pour le calcul de la largeur effective de la plaque
$\beta_M, \beta_{M,y}, \beta_{M,z}$	coefficients d'équivalence de moments d'extrémité
$\chi$	coefficient de réduction au flambement en compression

$\chi_{LT}$	coefficient de réduction au déversement
$\chi_y, \chi_z$	coefficient de réduction au flambement par flexion autour de y et z, respectivement
$\chi_y, \chi_z$	courbures non linéaires
$\varepsilon$	déformation longitudinale
$\varepsilon_e$	déformation longitudinale aux bords de la plaque
$\phi$	coefficient des courbes de flambement pour la compression
$\phi_{LT}$	coefficient des courbes de flambement pour le déversement
$\gamma_c$	coefficient partiel de sécurité à la compression
$\gamma_F$	coefficient partiel de sécurité à la flexion
$\gamma_{LT}$	coefficient partiel de sécurité au déversement
$\gamma_n$	déformée courante, configuration déformée
$\eta$	coefficient d'imperfection généralisé
$\eta = b_2/b_1$	rapport entre la largeur de la semelle et la largeur de l'âme
$\kappa_{LT}, \kappa_z$	coefficients de magnification au déversement et au flambement par flexion autour de z, respectivement, selon l'Eurocode 3
$\lambda$	multiplicateur de charge
$\bar{\lambda} = (P_{TC}/P_{cr})^{1/2}$	élancement réduit de colonne à parois minces pour la compression
$\bar{\lambda}_c = (f_y/\sigma_{cr})^{1/2}$	élancement réduit de colonne pour la compression
$\bar{\lambda}_{LT} = (M_{o,Rn}/M_{cr})^{1/2}$	élancement réduit de poutre au déversement
$\bar{\lambda}_p = (\sigma_e/\sigma_{cr,p})^{1/2}$	élancement réduit de plaques à l'état de service
$\bar{\lambda}_{po}$	élancement réduit limite de plaque épaisse
$\bar{\lambda}_{py} = (f_y/\sigma_{cr,p})^{1/2}$	élancement réduit de plaque
$\bar{\lambda}_{ry} = (f_y/\sigma_{cr,r})^{1/2}$	élancement réduit du raidisseur du profil C selon l'Eurocode 3
$\bar{\lambda}_s = (f_y/\sigma_{cr,s})^{1/2}$	élancement réduit de section
$\bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z$	élancement réduit de colonne pour le flambement en flexion autour de y et z, respectivement
$\mu_{LT}, \mu_z$	coefficients de $\kappa_{LT}$ et $\kappa_z$ , respectivement
$\nu$	coefficient de Poisson
$\pi = U + V$	énergie potentielle totale

$\theta$	rotation des bords de la plaque
$\theta_{\psi i}$	gauchissement de la section nodale
$\rho = b_e/b$	rapport de la largeur effective à la largeur totale de la plaque
$\rho_{MK}$	proposition alternative de Mulligan pour le calcul du $\rho$ de Kalyanaraman
$\rho_{MW}$	proposition alternative de Mulligan pour le calcul du $\rho$ de Winter
$\rho_p$	proposition de $\rho$ pour le calcul de la largeur effective au moyen d'une parabole
$\rho_y^K$	$\rho_y$ selon la formule de Kalyanaraman
$\rho_y^W$	$\rho_y$ selon la formule de Winter
$\rho_y$	rapport de la largeur effective à la largeur totale de la plaque à $f_y$
$\sigma$	contrainte longitudinale
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contraintes aux bords de la plaque pour le calcul de la largeur effective
$\sigma_b$	contrainte critique réduite de déversement selon l'AISI-90
$\sigma_c$	contrainte critique réduite de voilement local distorsionnel du raidisseur du profil C selon l'Eurocode 3
$\sigma_{cr}$	contrainte critique de flambement de la colonne
$\sigma_{cr,p}$	contrainte critique de voilement de plaque
$\sigma_{cr,r}$	contrainte critique élastique de voilement local distorsionnel du raidisseur du profil C selon l'Eurocode 3
$\sigma_{cr,s}$	contrainte critique de voilement de la section
$\sigma_e$	contrainte longitudinale aux bords de la plaque
$\sigma_{em}$	contrainte longitudinale moyenne aux bords de la plaque
$\sigma_{e\max}$	contrainte longitudinale maximum aux bords de la plaque
$\sigma_f$	contrainte au bord commun entre semelle et raidisseur du profil C
$\sigma_m$	contrainte longitudinale moyenne de compression de la plaque
$\sigma_s$	contrainte critique réduite de flambement par compression selon l'AISI-90
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$	contraintes de la plaque
$\xi$	scalaire
$\psi$	déplacement de rotation autour de x
$\psi_i, \theta_{yi}, \theta_{zi}$	rotations de la section nodale

$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	rapport des contraintes aux bords de la plaque
$\Psi_M$	rapport des moments d'extrémité
$\Gamma_o$	configuration de référence en état de repos
$\Gamma_n$	configuration de référence de la déformée courante
$\Omega$	coefficient $A_2$ du polynôme $f(p)$ pour une section à un axe de symétrie

## CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES

$a$	longueur de la plaque, demi-longueur de l'élément fini
$b$	largeur de la plaque
$b_1, b_2, b_3$	largeurs de plaques de la section idéalisée
$b_c$	largeur comprimée de la plaque
$b_e$	largeur effective
$b_t$	largeur tendue de la plaque
$b_{e1}, b_{e2}$	largeurs effectives de la plaque chargée excentriquement
$b_p$	largeur plane de la plaque d'une section réelle
$b_{p1}, b_{p2}, b_{p3}$	largeurs plane de plaques de sections réelles
$k^2$	coefficient du calcul des fonctions interpolatrices en torsion, $(GC_T/EI_\omega)$
$r$	rayon interne de pliage
$r^2$	$(y^2 + z^2)$
$(s, t)$	système d'axes curvilignes
$r_o$	rayon d'inertie polaire par rapport au centre de torsion
$t, e$	épaisseur
$t_{ef}$	épaisseur effective selon l'Eurocode 3
$y_c, z_c$	coordonnées du centre de torsion
$y_{Ge}, z_{Ge}$	coordonnées du centre de gravité de la section effective
$y_p, z_p$	coordonnées du point de connexion
$A$	aire de la section
$A_e$	aire de la section effective
$A_{es}$	aire de la section effective à $\sigma_s$ selon l'AISI-90
$A_r$	aire du raidisseur du C selon l'Eurocode 3

$C_y, C_z$	coordonnées du centre du cercle de stabilité de Vlassov
$C_T$	inertie en torsion de Saint Venant
$I_a$	inertie en flexion adéquate du raidisseur du C selon l'AISI-90
$I_y, I_z$	inerties flexionnelles: $\int_A z^2 dA, \int_A y^2 dA$
$I_{yr2}, I_{zr2}$	$\int_A yr^2 dA, \int_A zr^2 dA$
$I_r$	inertie en flexion du raidisseur du C selon l'Eurocode 3
$I_{r4}$	$\int_A r^4 dA$
$I_s$	inertie en flexion du raidisseur du C selon l'AISI-90
$I_\omega, I_{\omega c}$	inertie en gauchissement: $\int_A (\omega^c)^2 dA$
$I_{\omega cr2}$	$\int_A \omega^c r^2 dA$
$L$	longueur de la colonne
$L_{cr}$	longueur critique de demi onde de voilement ou flambement
$R_c$	rayon du cercle de stabilité de Vlassov
$W$	module de section
$W_e$	module de la section effective à $f_y$
$W_{eb}$	module de la section effective à $\sigma_b$ selon l'AISI-90
$\omega^c, \omega^c_{(y,z)}$	fonction de gauchissement définie à partir du centre de torsion
$\omega^*, \omega^*_{(y,z)}$	fonction de gauchissement définie à partir d'un point quelconque de la section



# **CHAPITRE 1**

## **INTRODUCTION**

1.1. GENERALITES	1.1
1.2. OBJECTIFS DE LA THESE	1.3

# INTRODUCTION

## 1.1. GENERALITES

L'effort de recherche entrepris depuis les années 40 dans le domaine des profils formés à froid a permis une utilisation chaque année plus importante de ce type d'élément dans la construction métallique. Cette expansion remarquable de l'utilisation des profils formés à froid, par rapport aux profils réalisés par laminage à chaud, est à associer aux nombreux avantages qu'ils possèdent par rapport à ces derniers. Par exemple, leur mode de fabrication, par profilage ou par pliage, permet la conception d'une très grande variété de formes, soit de sections, soit de tôles profilées. Cette facilité de produire des formes complexes permet non seulement une parfaite adéquation de la forme du profil à sa fonction, mais aussi l'obtention de sections plus résistantes du point de vue structural qui sont, en même temps, plus légères avec une moindre consommation de matériau. Cette légèreté entraîne aussi d'autres importants avantages comme les facilités de manutention, de transport et de montage, ce qui rend leur utilisation plus économique. Mis à part les avantages cités jusqu'ici, il y en a d'autres comme la possibilité d'effectuer diverses opérations secondaires en même temps que le formage telles que le perçage, le grugeage et la mise en peinture; et la possibilité de fabrication à partir de feuillards déjà galvanisés, ce qui peut dispenser, en partie, des traitements spéciaux de la surface du profil afin de le protéger contre la corrosion, spécialement dans le cas des tôles minces.

Quant au domaine d'application des profilés formés à froid, on peut distinguer d'une manière globale deux catégories: les produits de type 'section', figure 1.1a, et les produits de type 'tôle', figure 1.1b. Les produits de type section trouvent aujourd'hui leur utilisation comme éléments principaux ou secondaires des charpentes - poutres, poteaux et barres de treillis, les pannes U et Z, les rayonnages pour le stockage industriel, les pylônes de transmission d'énergie électrique, dans la construction des châssis et ossatures de voitures, de camions et de wagons de chemin de fer. Quant aux profils de type tôle, on trouve leur utilisation comme bardages et toitures pour bâtiments industriels et habitations, comme coffrage collaborant des planchers mixtes en acier-béton pour bâtiments à plusieurs étages et pour tabliers de ponts, et comme élément de parachèvement en panneaux horizontaux ou verticaux; dans ce dernier cas elles sont considérées comme éléments résistants aux efforts horizontaux et assurent ainsi le rôle de contreventement et de diaphragme.

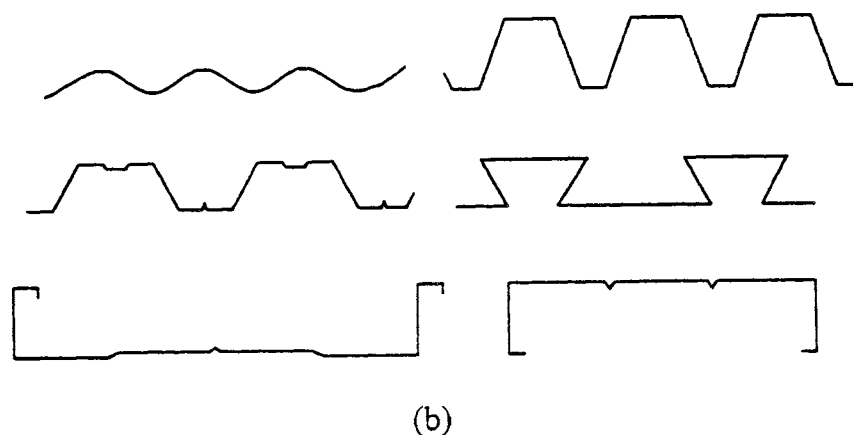
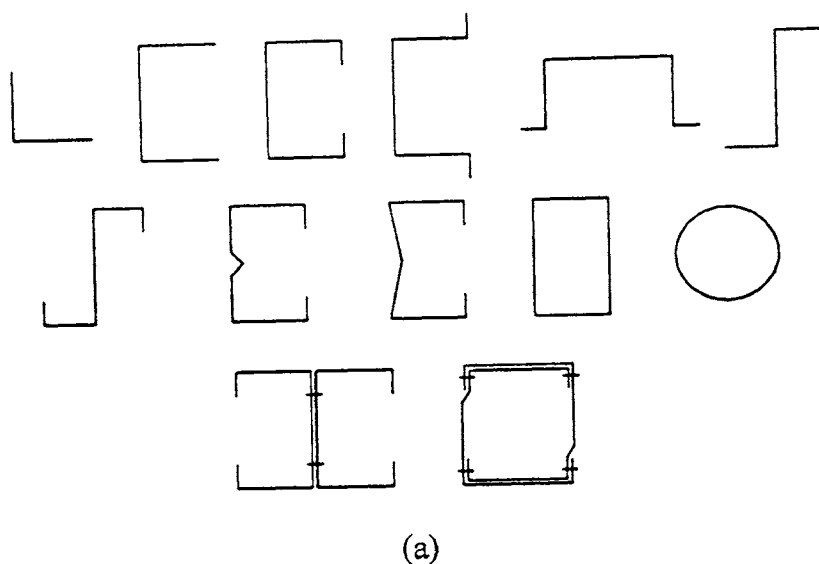


Figure 1.1- Eléments fabriqués par formage à froid.

(a) Sections;

(b) Tôles.

Malgré les nombreux avantages que les profils formés à froid apportent à la construction métallique, les formes parfois complexes des sections et la minceur des parois exigent du projeteur une connaissance plus approfondie de leur comportement structural que celle requise en construction métallique traditionnelle. Les profils à froid, qui sont généralement composés de plaques minces, ont un comportement très différent de celui des profils à chaud. La minceur des parois peut, en effet, provoquer un voilement des plaques et une interaction entre ce mode d'instabilité et les modes d'instabilité de type colonne, par flexion ou par flexion-torsion. Le comportement structural de ce type de profil a fait l'objet d'étude de plusieurs chercheurs tant en Europe qu'aux Etats-Unis. RONDAL et DUBINA [1], DUBINA [2] et WEI-WEN YU [3] décrivent non seulement des applications typiques et courantes des profilés à froid dans la construction métallique actuelle, mais aussi le phénomène d'interaction entre voilement local et flambement global

des profils formés à froid. Dans ces références on peut trouver un important rassemblement bibliographique de recherches réalisées sur les continents Européen [1,2] et Américain [3].

## 1.2. OBJECTIFS DE LA THESE

Si, pour des modes simples d'instabilité tels le flambement par flexion, par flexion-torsion, le déversement et le voilement, diverses études théoriques et expérimentales ont conduit à une connaissance satisfaisante du comportement de la structure imparfaite, il n'en est pas de même pour les cas où plusieurs modes d'instabilité entrent en interaction, ce qui conduit à une diminution parfois très importante de la capacité portante de la structure. Plus particulièrement on s'intéresse, dans cette thèse, à l'étude de la stabilité de colonnes lorsqu'il y a une interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilité. Les travaux de recherche existant dans ce domaine sont encore limités à des cas particuliers avec emploi de méthodes analytiques, semi-analytiques ou numériques (bande finie et élément fini de coque).

Le but de cette thèse est de développer un outil numérique, capable de prendre en compte l'interaction entre les modes locaux et globaux de la colonne, qui soit d'application générale et aisée en pratique. Pour atteindre ce but, on a choisi de travailler dans le cadre des méthodes numériques - élément fini non-linéaire de poutre spatiale; avec modélisation du voilement local au moyen de la méthode des largeurs effectives de plaques - méthode semi-empirique. La section transversale de l'élément fini est considérée comme une association de plaques et d'arrondis. Ce travail consiste finalement à consacrer ce 'mariage' de l'élément fini de poutre spatiale avec la variation des largeurs effectives de ses plaques. Trois types de sections transversales ont été étudiées dans ce travail: la cornière et les sections en U et en C, voir figure 1.2.

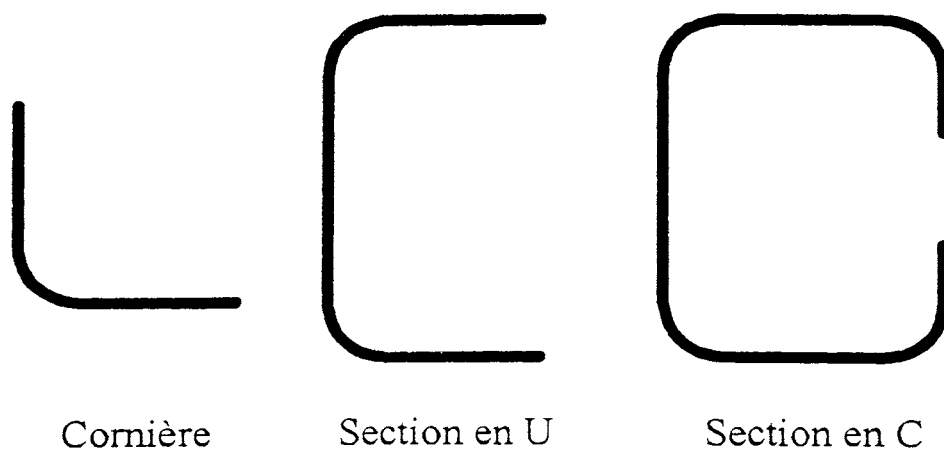


Figure 1.2- Sections de type cornière, U et C considérées dans ce travail.

## I - Introduction

On a choisi de diviser le mémoire de la façon suivante:

- a) Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la stabilité de plaques isolées et de plaques associées ou sections, à la modélisation du comportement post-critique de plaques au moyen de la méthode des largeurs effectives, à une étude approfondie des propositions de certains auteurs, de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 pour le calcul des largeurs effectives et, finalement, à la présentation des diverses manières qu'on a adopté pour calculer les largeurs effectives dans l'élément fini;
- b) Au chapitre 3 on trouve une description qualitative du phénomène d'interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilité, une revue des méthodes de calcul des profilés à parois minces avec concentration sur la méthode semi-analytique qui est celle qui intéresse de plus près ce travail, une étude détaillée de la stabilité globale de la colonne et une comparaison entre les méthodes de dimensionnement proposées dans l'Eurocode 3 et l'AISI-90;
- c) Le chapitre 4 donne une description complète de l'élément fini de poutre spatiale développé par Vincent de Ville à l'Université de Liège et les opérations supplémentaires nécessaires pour tenir compte de la variation de la section transversale de l'élément fini due à la modification des largeurs effectives de ses plaques à chaque itération du calcul numérique non-linéaire;
- d) Finalement, le chapitre 5 montre les comparaisons entre les résultats expérimentaux de colonnes comprimées sous charge centrée et excentrée et les résultats numériques obtenus par le programme FINLOC développé dans le cadre de cette thèse. Les profils étudiés sont la cornière et les sections en U et en C. On montre aussi des illustrations de dessins en 3-D obtenus par le post-processeur DRAWLOC;
- e) Le chapitre 6 rassemble les apports et les conclusions les plus importantes de la thèse. Sur base des conclusions, on présente aussi des suggestions intéressantes pour continuer ce travail.



## **CHAPITRE 2**

### **STABILITE ET RUINE DE PLAQUES**

<b>2.1. STABILITE DE PLAQUES</b>	<b>2.1</b>
2.1.1. Introduction	2.1
2.1.2. La bifurcation d'équilibre	2.3
2.1.3. Le comportement post-critique	2.9
<b>2.2. UNE APPROCHE SEMI-EMPIRIQUE DU COMPORTEMENT POST-CRITIQUE DES PLAQUES</b>	<b>2.13</b>
2.2.1. Généralités	2.13
2.2.2. Plaque dont les bords sont simplement appuyés	2.16
2.2.3. Plaque avec trois simplement appuyés et un bord libre	2.20
2.2.4. Cas de charge de compression uniformément variable	2.22
<b>2.3. LE COMPORTEMENT SOUS-ULTIME DE PLAQUES</b>	<b>2.26</b>
<b>2.4. STABILITE DE SECTIONS OU DE PLAQUES ASSOCIEES</b>	<b>2.36</b>
2.4.1. Généralités	2.36
2.4.2. La cornière	2.40
2.4.3. La section de type 'U'	2.42
2.4.4. La section de type 'C'	2.45
<b>2.5. LES NORMES ET DES ADAPTATIONS POUR LE CALCUL DE LARGEURS EFFECTIVES DANS LE PROGRAMME DE L'ELEMENT FINI</b>	<b>2.49</b>
2.5.1. Introduction	2.49
2.5.2. Plaque dont les bords sont simplement appuyés	2.49
2.5.3. Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre	2.57
2.5.4. Traitement du raidisseur du profil 'C'	2.61
2.5.4.1. Selon l'AISI-90	2.61
2.5.4.2. Selon l'Eurocode 3	2.68
<b>2.6. LA LARGEUR EFFECTIVE DANS L'ELEMENT FINI</b>	<b>2.72</b>
2.6.1. Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre	2.72
2.6.2. Eurocode 3	2.74
2.6.3. AISI-90	2.74
2.6.4. AISI-90*	2.75
2.6.5. Proposition A	2.75
2.6.6. Proposition B	2.76



# STABILITE ET RUINE DE PLAQUES

## 2.1. STABILITE DE PLAQUES

### 2.1.1. Introduction

On se bornera ici à des structures chargées statiquement par des forces conservatives. Leur comportement réel dépend de la non-linéarité du matériau et de la non-linéarité géométrique, c'est à dire, de la plastification et des relations non-linéaires entre déformations et déplacements. Pour le cas des structures parfaites, on peut distinguer deux cas de comportement différents:

- a) Celles qui exhibent un comportement, multiplicateur de charge  $\times$  déplacement, non-linéaire dès le début de l'action des forces pour atteindre, ensuite, un sommet, appelé point-limite dans la littérature, après lequel la structure ne peut plus absorber le travail des forces extérieures agissant sur elle comme énergie interne de déformations et se précipite dans la ruine, et;
- b) D'autres qui se comporte linéairement pour des valeurs du multiplicateur de charge allant de l'origine jusqu'à un certain niveau, appelé par point de bifurcation, où la structure flambe (ou voile) pour suivre un chemin d'équilibre adjacent (secondaire) au chemin d'équilibre fondamental (primaire) qu'elle suivait avant.

Ces deux types de comportement sont illustrés à la figure 2.1. Dans ce chapitre on étudiera la stabilité de plaques rectangulaires ayant deux bords parallèles à la direction de la charge de compression appliquée simplement appuyés, ou avec un bord simplement appuyé et l'autre libre. On considère que les bords chargés sont toujours simplement appuyés. On trouve à la figure 2.2, une illustration de la plaque chargée dans son plan. On s'intéressera d'abord aux plaques parfaites (cas b) afin de bien connaître leur comportement théoriquement. Après on passera à l'étude des plaques imparfaites, dont le comportement est tout à fait similaire au cas (a) à cause des non-linéarités engendrées par les imperfections.

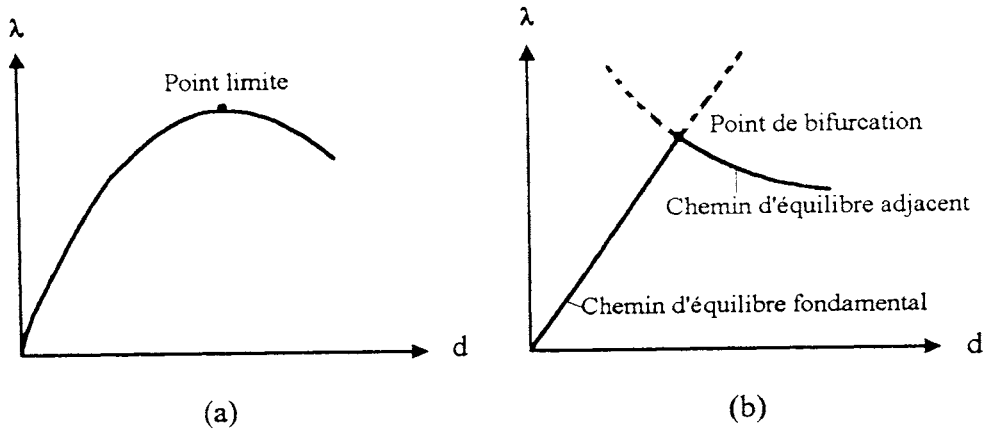


Figure 2.1- Comportement d'une structure parfaite.

- (a) Comportement non-linéaire;
- (b) Comportement linéaire.

Si on considère un système structural soumis à un système de forces conservatives, son énergie potentielle totale est définie par :

$$\pi = U + V \quad (2.1)$$

où  $U$  est l'énergie interne de déformation avec les relations deformation-déplacement non-linéaires complète et  $V$  est l'énergie potentielle des forces extérieures. Le critère de stabilité énergétique (voir DYM [4] et CROLL et WALKER [5] ) établit que pour une certaine configuration d'équilibre du système, si l'énergie potentielle totale est un minimum dans le voisinage de cette configuration, alors l'équilibre est stable. Si, au contraire,  $\pi$  est un maximum, alors l'équilibre est instable et si  $\pi$  est constant l'équilibre est indifférent. Autrement dit, si l'état d'équilibre est perturbé par rapport à sa configuration de départ, la variation de l'énergie potentielle des forces extérieures ( $\Delta V$ ) due à la perturbation ne doit pas excéder la variation de l'énergie interne de déformation pour que la configuration initiale soit stable. Quand  $\Delta V$  excède  $\Delta U$ , l'excès d'énergie se transforme en énergie cinétique et la configuration initiale est instable.

En appelant par  $q$  le déplacement généralisé de la plaque (à savoir  $u, v$  et  $w$  - voir figure 2.2) dans l'état d'équilibre fondamental, on définit le voisinage de cette configuration par une perturbation  $\delta q$ , qui est un champ de déplacement virtuel infiniment petit et cinématiquement admissible. La variation de l'énergie potentielle totale dans le voisinage de la configuration d'équilibre s'écrit alors:

$$\Delta \pi = \pi(q + \delta q) - \pi(q) = \delta \pi + \delta^2 \pi + \delta^3 \pi + \dots \quad (2.2)$$

Par l'hypothèse de formulation du problème de stabilité, la première variation de  $\pi$ ,

$$\delta \pi = 0 \quad (2.3)$$

doit s'annuler, vue que la configuration en question est en équilibre. Il reste, dès lors, à étudier le comportement de la variation seconde de  $\pi$ , soit  $\delta^2\pi$ . En tenant compte du critère de stabilité énergétique déjà mentionné ci dessus, on a:

$$\pi(\text{Minimum}) \rightarrow \Delta\pi > 0 \rightarrow \delta^2\pi > 0 \rightarrow \text{Équilibre stable}$$

$$\pi(\text{Maximum}) \rightarrow \Delta\pi < 0 \rightarrow \delta^2\pi < 0 \rightarrow \text{Équilibre instable}$$

Dans le cas où  $\delta^2\pi$  est nul, il faut passer à l'analyse des variations d'ordre supérieur. Si toutes les variations d'ordre supérieur sont nulles, alors l'équilibre est indifférent. Souvent, pour les cas pratiques, il n'est pas nécessaire de pousser l'analyse au-delà de la variation seconde pour en inférer les propriétés de stabilité.

### 2.1.2. La bifurcation d'équilibre

Dans la définition de l'énergie potentielle totale  $\pi$  (équation 2.1), on a retenu les termes non-linéaires des relations déformation-déplacements. Si on définit, maintenant, une fonctionnelle d'énergie  $\pi_L$  de la plaque en ne retenant que les termes quadratiques dans les déplacements  $q$  et, en même temps, en faisant usage de l'hypothèse d'inextensibilité des fibres de la surface moyenne de la plaque, on trouve:

$$\pi_L(w) = U_L + V_L \quad (2.4)$$

où on voit que  $\pi_L$  ne dépend que du déplacement hors-du-plan  $w(x,y)$ . A cause de l'hypothèse faite, la condition d'équilibre de l'état fondamental le rend stationnaire et s'écrit:

$$\delta\pi_L = 0 \quad (2.5)$$

ce qui conduit au problème aux valeurs-propres représenté par le système d'équations différentielles partielles qui en résulte. Par exemple, pour le cas d'une plaque rectangulaire chargée longitudinalement dans son plan, comme montré à la figure 2.2,

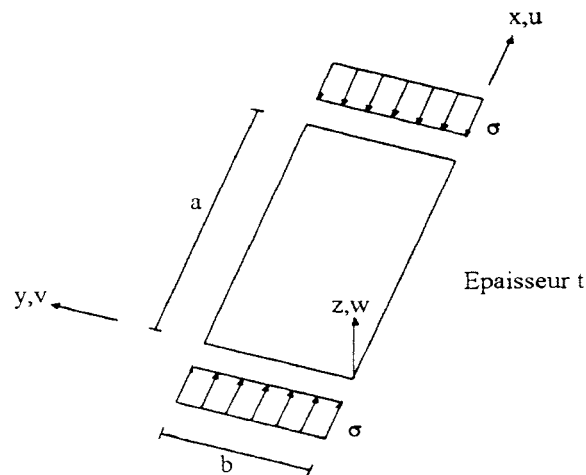


Figure 2.2- Plaque rectangulaire soumise à une charge de compression uniaxiale dans son plan.

SAINT VENANT [6] en déduit l'équation différentielle d'équilibre :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{\sigma \cdot t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

où  $t$  est l'épaisseur de la plaque,  $\sigma$  est la contrainte uniaxiale de compression dans le sens de  $x$ ,  $D$  est la rigidité de la plaque en flexion ( $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ ), tandis que  $w(x,y)$  est la déformée transversale de la plaque.

En prenant, par exemple, le cas particulier d'une plaque simplement appuyée sur les quatre bords et soumise à une contrainte  $\sigma$  uniformément répartie, l'équation (2.6) présente deux solutions, à savoir :

- La solution triviale  $w(x,y) = 0$ , quelque soit la valeur de la contrainte  $\sigma$ , représentée par le chemin d'équilibre fondamental  $P_F$  illustré à la figure 2.3.
- En remplaçant dans l'équation (2.6) le déplacement transversal  $w(x,y)$  par une fonction qui satisfait aux conditions d'appui géométriques et naturelles aux quatre bords simplement appuyés de la plaque, soit:

$$w(x,y) = W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.7)$$

on obtient:

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{cr,p}}\right) W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0 \quad (2.8)$$

où:

$$\sigma_{cr,p} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.9)$$

avec:

$$k = \left[ \left(\frac{mb}{a}\right)^2 + 2n^2 + n^4 \left(\frac{a}{mb}\right)^2 \right] \quad (2.10)$$

L'analyse de l'équation (2.8) montre que le seul moyen d'avoir une solution  $w(x,y)$  non-nulle, est d'annuler le terme entre parenthèses. Il vient dès lors que si:

$$\sigma = \sigma_{cr,p} \quad (2.11)$$

on a une solution non-triviale pour l'équation (2.6). La variable  $\sigma_{cr,p}$  est appelée contrainte critique de voilement de plaques, puisque pour autant que  $\sigma = \sigma_{cr,p}$ , la déformée transversale  $w(x,y)$  (équation 2.7) peut prendre n'importe quelle valeur. Ce phénomène est appelé, dans la littérature, bifurcation d'équilibre et est illustré à la figure 2.3 par le chemin d'équilibre adjacent  $P_A$ . Les valeurs de  $\sigma_{cr,p}$  (équation 2.9) et  $w(x,y)$  (équation 2.7) pour les différentes valeurs de  $m$  et  $n$  sont respectivement les valeurs-propres et les fonctions-propres associées à l'équation différentielle (2.6).

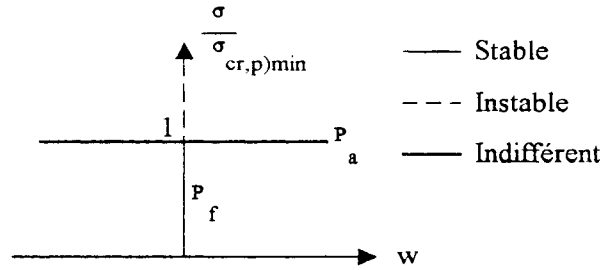


Figure 2.3- Les chemins d'équilibre fondamentaux et adjacents relatifs à l'équation (2.6) du problème de voilement de plaques.

Pour s'assurer de la stabilité de la plaque, il faut se tenir à ce que la variation seconde de  $\pi_L$  soit positive-définie:

$$\delta^2 \pi_L > 0 \quad (2.12)$$

On peut aisément montrer que cette condition est satisfaite si:

$$\sigma < \sigma_{cr,p) \min} \quad (2.13)$$

Pour cela il faut minimiser l'expression (2.10) de  $k$ , le coefficient de voilement de plaques. On voit aisément que  $k$  croît monotoniquement avec la valeur de  $n$ ; ce qui revient à imposer  $n = 1$  (une seule demi-onde dans le sens transversal de la plaque). On a alors:

$$k = \left( m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \quad (2.14)$$

Pour mieux comprendre l'expression (2.14) de  $k$ , une représentation graphique est donnée à la figure 2.4 pour diverses valeurs de  $m$ .

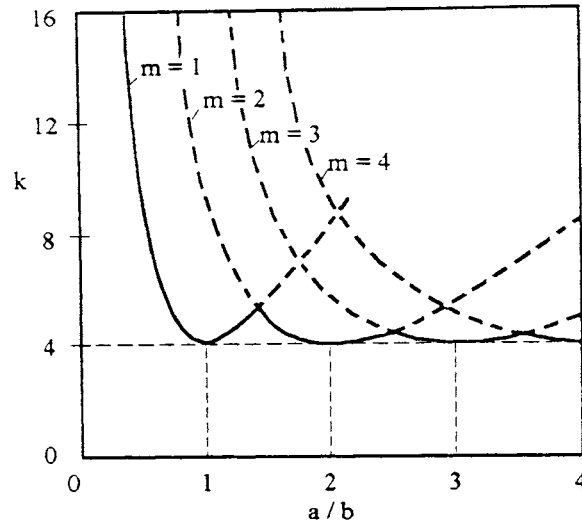


Figure 2.4- Coefficient de voilement pour une plaque simplement appuyée sur les quatre bords et soumise à une charge uniaxiale de compression uniforme.

On s'aperçoit que les courbes des différents modes d'instabilité passent toutes par une valeur minimum de  $k$  égale à 4 et que l'influence du mode d'instabilité sur la valeur du coefficient de voilement est d'autant plus petite que le rapport des dimensions de la plaque  $a/b$  est plus grand. Puisque, en pratique, les plaques sont toujours très longues dans le sens de la compression par rapport au sens transversal, on utilise normalement le coefficient de voilement de plaques simplement appuyée sur les quatre bords et soumise à une compression uniforme,  $k$  égale à 4. Ainsi, la condition (2.13) garantit que, dans ce domaine, la plaque est stable (voir figure 2.3). On montre aussi à la figure 2.5 la configuration du mode de voilement de la plaque étudiée.

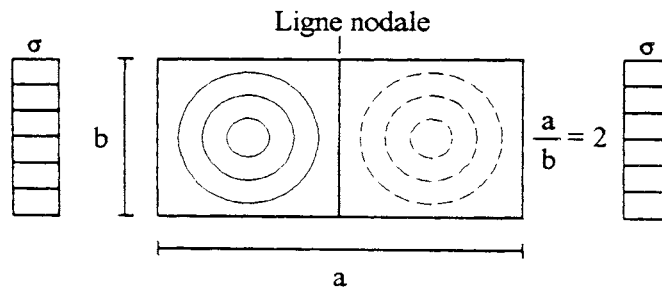


Figure 2.5- Configuration de voilement pour une plaque bi-appuyée aux quatre bords et soumise à une compression uniaxiale uniforme.

L'exemple traité ci-dessus a mis en évidence la méthode différentielle pour l'étude de la stabilité des plaques, en partant des équations différentielles partielles d'équilibre du problème. Il existe aussi une méthode énergétique, par laquelle on obtient la contrainte critique en annulant la variation seconde de la fonctionnelle d'énergie  $\pi_L$  de la plaque.



$$\delta^2 \pi_L = 0 \quad (2.15)$$

Cette égalité exprime la condition de stabilité neutre déjà discutée dans les paragraphes précédents (voir figure 2.3) et est le principe bien connu de RAYLEIGH. Si on écrit la variation seconde de l'énergie potentielle des forces extérieures sous la forme:

$$\delta^2 V_L = \lambda \delta^2 T_L \quad (2.16)$$

où on a mis en évidence le multiplicateur de charge  $\lambda$  des forces extérieures; la condition (2.15) s'écrit alors:

$$\lambda = \frac{\delta^2 U_L(w)}{\delta^2 T_L(w)} \quad (2.17)$$

Comme  $\pi_L$  est une fonctionnelle d'énergie quadratique dans le déplacement transversal  $w(x,y)$ , les variations secondes de l'équation (2.17) peuvent s'écrire:

$$\delta^2 U_L(w) = U_L(\delta w) \quad (2.18a)$$

$$\delta^2 T_L(w) = T_L(\delta w) \quad (2.18b)$$

où  $\delta w$  est le mode de flambement perturbateur. Si la forme exacte du mode de flambement n'est pas connue a priori, on peut utiliser une fonction approchée pour la représenter dans les formules (2.17) et (2.18). Finalement, la méthode énergétique pour le calcul de stabilité, ou principe de RAYLEIGH, s'écrit :

$$\lambda = \min \left( \frac{U_L(\delta w)}{T_L(\delta w)} \right) \quad (2.19)$$

En ce qui concerne les plaques, on trouve notamment, dans la littérature, les travaux de TIMOSHENKO et GERE [7] et BULSON [8] qui, à l'aide des méthodes différentielle et énergétique, ont fait l'étude de la stabilité de plaques avec plusieurs conditions d'appui. Ils ont aussi pris en compte un diagramme de contraintes variant linéairement le long des bords chargés de la plaque.

Dans le cas de la plaque simplement appuyée sur les quatre bords, la prise en compte d'une charge variable linéairement (voir figure 2.6a) se fait au moyen du rapport  $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$ , qui définit le type de sollicitation, où  $\sigma_1$  est la contrainte de compression de signe positive et de plus grande valeur absolue, et  $\sigma_2$  peut être de compression (positive) ou de traction (négative). On obtient ici aussi des courbes en festons analogues à celles de la figure 2.4 et les valeurs minimum de  $k$ , en fonction de  $\psi$ , sont données à la figure 2.6b. On peut remarquer, dans cette figure, que la valeur de la contrainte critique dans le cas de flexion pure ( $\psi = -1$ ) vaut environ 6 fois la valeur de la contrainte critique de compression pure ( $\psi = 1$ ).

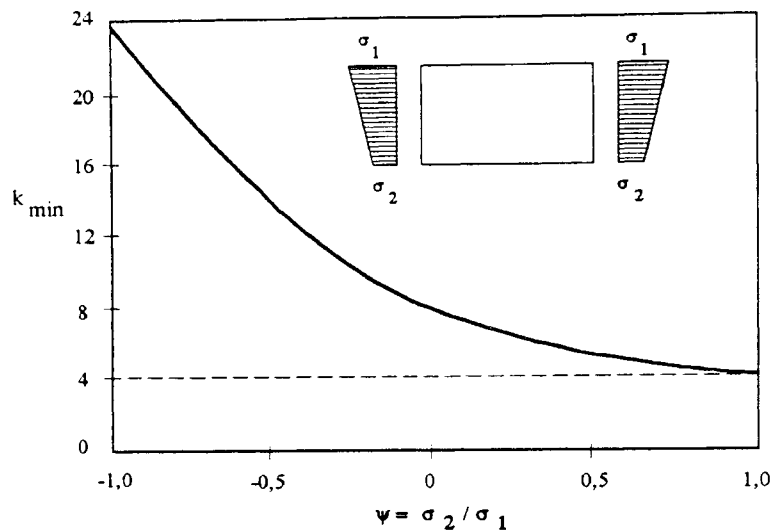


Figure 2.6- Coefficient de voilement minimum pour une plaque avec quatre bords simplement appuyés et soumise à une compression variable linéairement.

Dans le cas d'une plaque dont les bords parallèles à la direction de la charge sont simplement appuyés et libres; et les bords chargés sont simplement appuyés (voir figure 2.7a), le calcul de stabilité montre que la valeur du coefficient de voilement,  $k$ , est toujours minimale pour le mode d'instabilité correspondant à une demi-onde dans la direction de la charge appliquée; c'est à dire,  $m=1$ . La solution du problème aux valeurs propres (équation 2.6), pour différentes valeurs de  $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$ , est donnée à la figure 2.7b, selon BULSON [8]. On y voit que toutes les courbes tendent asymptotiquement vers une certaine valeur (pour chaque valeur de  $\psi$ ) quand la valeur du rapport des dimensions de la plaque  $a/b$  croît. C'est ainsi qu'on en déduit la valeur du coefficient de voilement,  $k$ , pour le cas de la compression pure ( $\psi = 1$ ),  $k = 0,425$ .

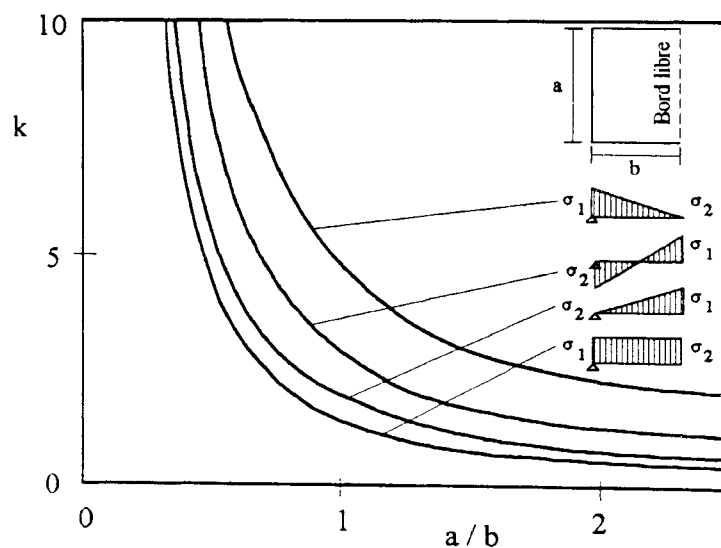


Figure 2.7- Coefficient de voilement pour une plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre et soumise à une compression variable linéairement.

### 2.1.3. Le comportement post-critique

Malheureusement, la formulation qu'on vient de voir est tributaire du fait qu'on n'a gardé que les termes quadratiques en  $q$  dans la fonctionnelle d'énergie  $\pi_L$ , en faisant usage de l'hypothèse d'inextensibilité de la surface moyenne de plaque. A cause de cette simplification, il n'est pas possible d'obtenir le comportement post-critique réel de la plaque, c'est à dire, le vrai chemin d'équilibre adjacent suivi après le flambement (voilement). Pour y arriver il faut garder la non-linéarité géométrique et, par voie de conséquence, tous les termes d'ordre supérieur à deux dans les déplacements  $q$ , tel que donné dans la définition de  $\pi$  (équation 2.1). En outre, les contraintes membranaires au niveau de la surface moyenne de la plaque ne peuvent pas être négligées comme précédemment (hypothèse d'inextensibilité).

Il existe trois moyens pour obtenir la réponse post-critique d'une plaque, à savoir :

- a) La méthode différentielle;
- b) La méthode semi-énergétique, et;
- c) La méthode énergétique.

La méthode différentielle consiste à trouver la solution des équations d'équilibre et de compatibilité de von KARMAN [9]. L'équation d'équilibre provient du développement de l'équation (2.3), alors que la deuxième exprime la compatibilité entre les déformations dans la surface moyenne et le déplacement hors du plan de la plaque, on a alors:

$$D\nabla^4 w = t L(F, w) \quad (2.20a)$$

$$\nabla^4 F = -\frac{E}{2} L(w, w) \quad (2.20b)$$

respectivement, où les opérateurs différentiels sont définis par:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \alpha}{\partial y^4} \quad (2.21)$$

$$L(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \quad (2.22)$$

et  $F$  est la fonction de contraintes d'Airy, de laquelle on peut dériver les contraintes à l'aide des relations suivantes:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (2.23a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2.23b)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.23c)$$

Malgré la difficulté d'intégrer rigoureusement les équations (2.20), on peut trouver dans la littérature quelques chercheurs qui ont suivi cette démarche. YAMAKI [10] en a trouvé la solution exacte, en développant en série les déplacements transversaux  $w(x,y)$ , dont les coefficients sont déterminés de manière à satisfaire les conditions d'appui et les équations (2.20). Il a aussi inséré dans ses développements l'effet des imperfections géométriques initiales. Sa solution est dite exacte parce qu'il a tenu compte du changement de la configuration post-critique en cours de chargement, ce qui fait de son travail un point de référence dans ce domaine.

La méthode semi-énergétique est due à MARGUERRE [11]. Dans cette méthode on suppose une série de fonctions pour représenter la configuration voilée de la plaque. A l'aide de cette série et de l'équation de compatibilité (2.20b), on trouve l'expression de la fonction de contraintes  $F$ . On écrit la fonctionnelle d'énergie en fonction de  $F$  et ensuite on applique la condition de stationnarité pour trouver les coefficients de la série. USAMI [12] et RHODES et HARVEY ont suivi cette démarche ainsi qu'en témoigne une série de trois de leurs articles [13,14,15]. Dans le premier de ces articles [13] ils ont traité le problème de la plaque soumise à une compression uniforme avec plusieurs conditions d'appui pour les bords non-chargés. Ensuite, dans l'article [14], ils ont tenu compte de l'effet de l'excentricité et du mode d'application de la charge. Finalement, l'effet des imperfections géométriques initiales a été ajouté dans la référence [15]. Il faut rappeler que, avec cette méthode, la configuration post-critique reste inchangée en cours de chargement. Cependant, ces auteurs considèrent que leur travail donne des résultats satisfaisant pour des valeurs de charge allant jusqu'à deux fois la valeur critique. Un résumé des trois derniers articles a été publié par les mêmes auteurs dans la référence [16] où les développements antérieurs sont présentés sous une forme plus succincte et aisé à comprendre. USAMI [12] a établi des formules de largeurs effectives pour le cas de la plaque soumise à une charge excentrée à partir des résultats analytiques de cette méthode.

La méthode énergétique est, par sa simplicité, la méthode la plus facile à utiliser. Elle consiste à assumer, a priori, une configuration post-critique à l'aide de séries finies des déplacements  $(u,v,w)$  de la plaque. Ensuite, les déplacements ainsi définis sont insérés dans la fonctionnelle d'énergie  $\pi$  de la plaque et les coefficients des séries de déplacements sont trouvés à partir du principe de la stationnarité de la fonctionnelle d'énergie. La bonne précision des résultats dépend des fonctions choisies pour les séries de déplacements. Plus elles s'approchent de la configuration réelle en régime post-critique, plus précis sera le

résultat. Pour le lecteur intéressé, KOITER [17] donne un aperçu de la méthode énergétique et une appréciation sur de nombreux travaux rencontrés dans la littérature.

Concernant les conditions d'appui dans le plan de la plaque aux endroits des bords non-chargés, WALKER [18] a étudié analytiquement le comportement post-critique de la plaque simplement appuyée sur les bords. Cette condition d'appui implique que la plaque est libre de se déformer dans son plan aux bords parallèles à l'application de la charge. Il faut noter que ceci est bien la condition d'appui de plaques composant les profils à parois minces où l'angle droit entre les parois et leur minceur permettent les déplacements locaux transversaux des arrondis.

D'autre part, MAYERS [19] a étudié au moyen de la méthode énergétique le cas où les bords non-chargés sont astreints à rester droits, mais en permettant le déplacement latéral de ces bords dans le plan de plaque. On trouve à la figure 2.8 une illustration des deux conditions d'appui. On trouve, dans le tableau 2.1, une comparaison des raideurs de plaques et du chemin d'équilibre adjacent au voisinage du point de bifurcation pour les conditions d'appui précitées. La figure 2.9 illustre la notation utilisée dans le tableau 2.1, où  $\alpha$  est le coefficient de la réponse post-critique,  $E^*$  est la raideur de la plaque comprimée en régime post-critique,  $\varepsilon$  est la déformation longitudinale moyenne dans le sens de compression de la plaque et  $\varepsilon_{cr,p}$  est la déformation correspondante à  $\sigma_{cr,p}$ .

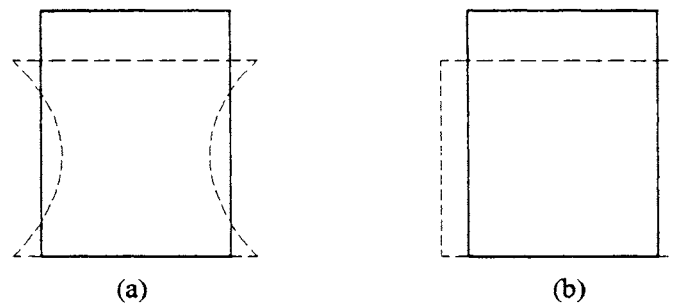


Figure 2.8- Conditions d'appui dans le plan des bords non-chargés.

- (a) Bords non-chargés libres de se déformer;
- (b) Bords non-chargés astreints à rester droits.

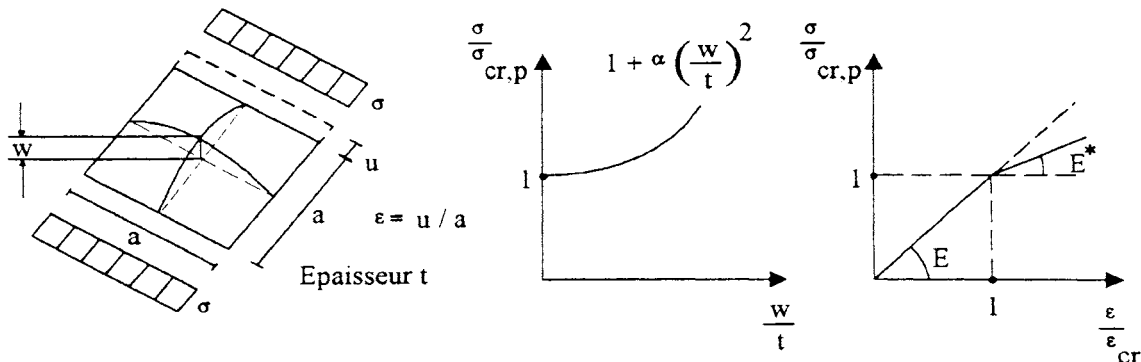


Figure 2.9- Comportement post-critique d'une plaque parfaite.

	WALKER [18]	MAYERS [19]
$\alpha$	0,24	0,34
$E^*$	0,408 E	0,5 E

Tableau 2.1- Comparaison des raideurs en régime post-critique de plaques.

Dans le cadre de la méthode énergétique, KOITER, dans sa thèse de doctorat [20], a non seulement développé les déplacements en série:

$$q = q_1 \xi + q_2 \xi^2 + \dots \quad (2.24)$$

mais aussi, le multiplicateur de charge,

$$\frac{\lambda}{\lambda_{cr}} = 1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots \quad (2.25)$$

dans le voisinage de la charge critique, où  $q_1$  est le mode de voilement correspondant à la plus petite valeur-propre du problème de l'équation (2.6) et  $q_2$  représente les déplacements dans le plan qui déterminent la redistribution de contraintes membranaires;  $a_1$  et  $a_2$  sont des coefficients à déterminer et  $\xi$  est un scalaire. L'approche de KOITER est appelée analyse asymptotique. A la lumière de l'analyse asymptotique, on peut distinguer trois cas de comportement post-critique, qui sont illustrés à la figure 2.10:

- a) Bifurcation asymétrique ( $a_1 \neq 0$ );
- b) Bifurcation symétrique stable ( $a_1 = 0$  et  $a_2 > 0$ );
- c) Bifurcation symétrique instable ( $a_1 = 0$  et  $a_2 < 0$ ).

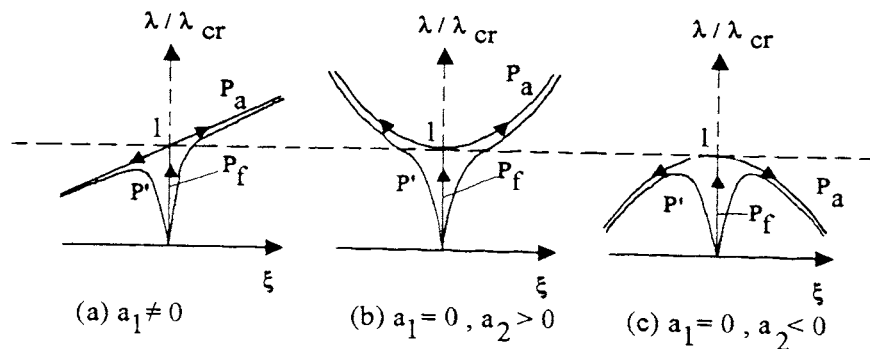


Figure 2.10- Différents types de comportement post-critique.

- (a) Bifurcation asymétrique;
- (b) Bifurcation symétrique stable;
- (c) Bifurcation symétrique instable.

On montre aussi, à la figure 2.10, le chemin d'équilibre  $P'$  suivi lorsque la structure n'est pas parfaite, où la non-linéarité engendrée par les imperfections fait disparaître tout phénomène de bifurcation, donnant ainsi un comportement non-linéaire dès l'origine, pour ensuite rejoindre asymptotiquement le chemin d'équilibre adjacent de la structure parfaite.

Une comparaison entre la figure 2.9 et la figure 2.10b montre que la plaque sous compression uniaxiale possède un comportement post-critique stable ce qui fait qu'elle peut résister à des charges nettement supérieures à la charge critique. Cependant, cette réserve post-critique n'est pas illimitée et von KARMAN, SCHLER et DONNEL [21], sur base de résultats expérimentaux, ont constaté que la plaque atteint la ruine lorsque la contrainte de compression maximale aux bords non-chargés atteint la limite élastique comme montré à la figure 2.11.

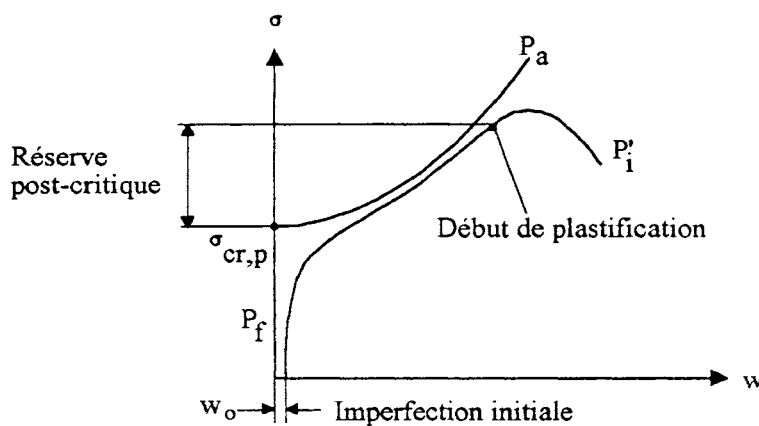


Figure 2.11- Réponse d'une plaque réelle.

Le but de cette thèse étant d'étudier la stabilité de profils à parois minces, le voilement des plaques constituant ses parois ne peut pas être négligé. Cependant, grâce à la réserve post-critique des plaques voilées, les profils peuvent résister au-delà du voilement des parois. Une étude détaillée de l'interaction voilement-flambement global est donnée au chapitre suivant de cette thèse.

## 2.2. UNE APPROCHE SEMI-EMPIRIQUE DU COMPORTEMENT POST-CRITIQUE DE PLAQUE

### 2.2.1. Généralités

Comme on vient de voir dans le paragraphe précédent, la méthode analytique pour évaluer la réserve post-critique de plaques est trop compliquée pour une utilisation pratique. Il s'impose dès lors de trouver une méthode simple et efficace qui permet non seulement de calculer la résistance ultime des plaques, mais aussi sa rigidité en régime post-critique.

En 1932, von KARMAN [21] a inventé la méthode de la largeur effective. Cette méthode s'est très vite répandue dans la communauté scientifique de l'époque et est celle qui est la plus utilisée à l'heure actuelle. Son concept est illustré aux figures 2.12a et 2.12b pour la plaque simplement appuyée aux quatre bords et la plaque simplement appuyée sur trois bords, l'autre étant libre, respectivement. Si la contrainte de compression uniforme  $\sigma_m$  reste plus petite que la contrainte critique de voilement  $\sigma_{cr,p}$ , la plaque est totalement effective. Mais, si  $\sigma_m$  dépasse  $\sigma_{cr,p}$  la plaque voile et une redistribution des contraintes  $\sigma_x$  a lieu dans la plaque comme montré à la figure 2.12. Dans le cas de la figure 2.12a, la totalité de l'effort peut être considérée comme reprise par deux bandes longitudinales à l'endroit des deux bords non-chargés, alors que dans le cas de la figure 2.12b, cette bande se situe à l'endroit du seul bord non-chargé et simplement appuyé. On appelle  $\sigma_e$  la contrainte  $\sigma_x$  aux bords non-chargés et dont la répartition suivant l'axe x après voilement est aussi illustrée dans la figure 2.12. On définit:

$$\sigma_{em} = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma_e dx \quad (2.26)$$

où  $\sigma_{em}$  est la contrainte moyenne aux bords non-chargés.

A l'aide de  $\sigma_{em}$  et  $\sigma_{emax}$  on peut définir deux variations du concept de largeur effective de la manière suivante:

$$b_e \sigma_{em} = \sigma_m b \Rightarrow \rho = \frac{b_e}{b} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{em}} \quad (\sigma_m > \sigma_{cr,p}) \quad (2.27)$$

$$b_e \sigma_{emax} = \sigma_m b \Rightarrow \rho = \frac{b_e}{b} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{emax}} \quad (\sigma_m > \sigma_{cr,p}) \quad (2.28)$$

Où  $\rho$  est un coefficient de réduction de la largeur effective  $b_e$  par rapport à la largeur totale  $b$ . L'équation (2.27) donne la largeur effective en fonction de la contrainte moyenne  $\sigma_{em}$  et sert alors à trouver la rigidité post-critique de la plaque, elle s'appelle largeur effective de déformations. L'équation (2.28) définit la largeur effective en fonction de la contrainte maximum  $\sigma_{emax}$ . Von KARMAN [21] a considéré que les plaques atteignent la ruine quand  $\sigma_{emax} = f_y$ , où  $f_y$  est la limite élastique du matériau de la plaque. Par voie de conséquence, l'équation (2.28), aussi appelée largeur effective de contraintes, sert à trouver la largeur effective à l'état de ruine de la plaque en y posant  $\sigma_{emax} = f_y$ . Mais si  $\sigma_{emax} < f_y$ , cette formule sous-estime la rigidité de la plaque en régime post-critique.



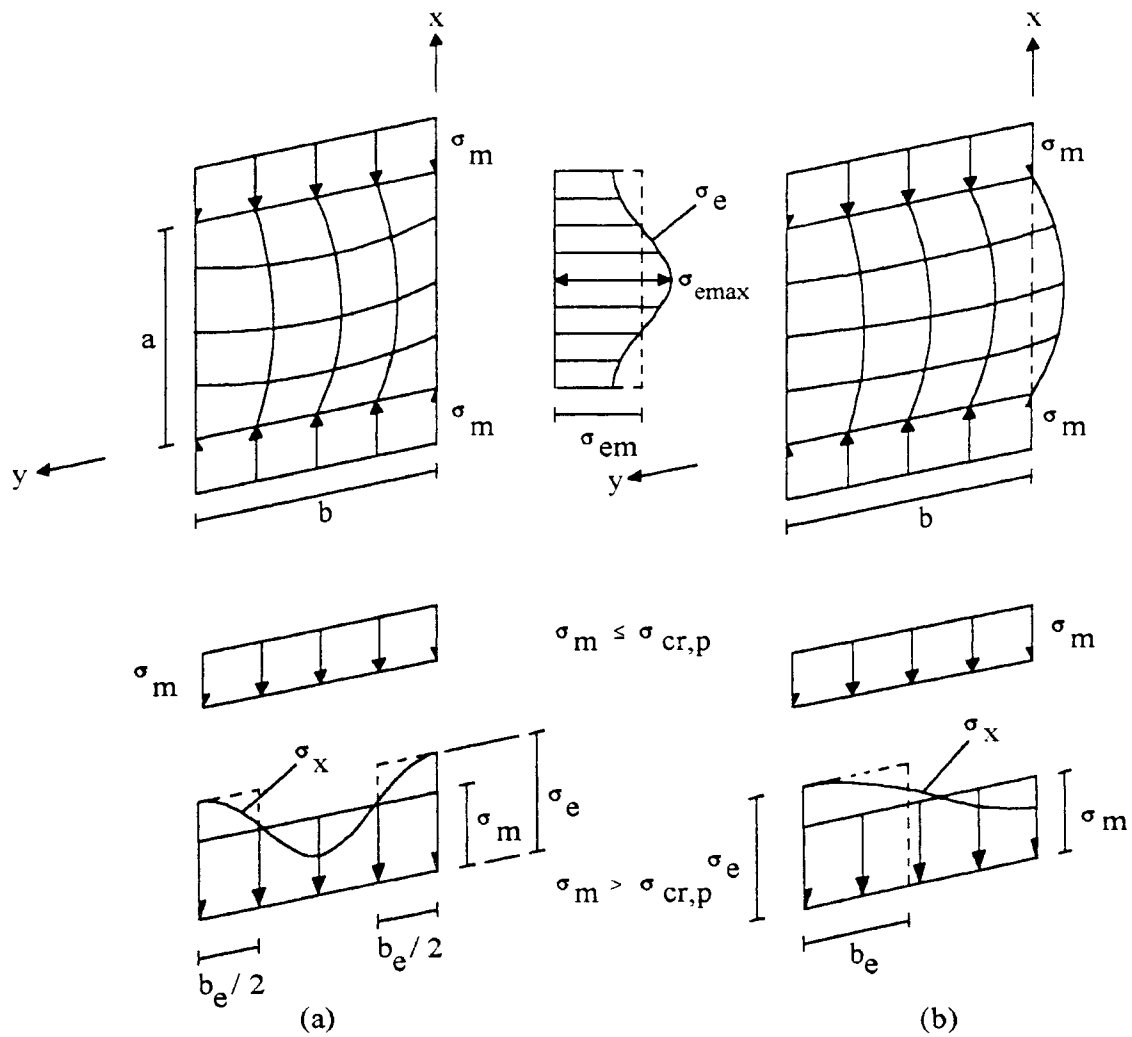


Figure 2.12- Le concept de largeur effective.

(a) Plaque simplement appuyée aux quatre bords;

(b) Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre.

On définit également les élancements réduits de la plaque  $\bar{\lambda}_p$  (à l'état de service) et  $\bar{\lambda}_{py}$  (à l'état de ruine); et la quantité  $S$  par:

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\sigma_{cr,p}}} \quad (2.29)$$

$$\bar{\lambda}_{py} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,p}}} \quad (2.30)$$

$$S = \frac{\sigma_m}{\sigma_{cr,p}} \quad (2.31)$$

## II - Stabilité et ruine de plaques

où  $\sigma_{cr,p}$  est donné par l'équation (2.9) et est réécrite ici par soucis de clarté:

$$\sigma_{cr,p} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \quad (2.32)$$

En réécrivant l'équation (2.28) sous une autre forme:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{cr,p}} \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{e\max}} \quad (2.33)$$

et en utilisant les équations (2.29) et (2.31), on a la relation suivante:

$$S = \rho \bar{\lambda}_p^2 \quad (2.34)$$

et à l'état de ruine cette relation s'écrit:

$$S_y = \rho_y \bar{\lambda}_{py}^2 \quad (2.35)$$

### **2.2.2. Plaque dont les bords sont simplement appuyés**

L'approche de largeur effective, développée initialement par von KARMAN [21], est basée sur des résultats expérimentaux d'essais de plaques isolées jusqu' à la ruine et permet de tirer les conclusions suivantes:

- a) La charge de ruine est indépendante de la largeur de la plaque;
- b) La charge de ruine est proportionnelle au carré de l'épaisseur  $t$  de la plaque.

A partir de ces conclusions, von KARMAN a formulé l'hypothèse que la contrainte de voilement de la largeur effective à l'état de ruine devait égaler la limite élastique  $f_y$ :

$$f_y = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b_e} \right)^2 \quad (2.36)$$

En combinant les équations (2.30), (2.32) et (2.36) on arrive à:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_{py}} \leq 1 \quad (2.37)$$

On peut plus généralement écrire l'équation (2.37) à l'état de service:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \leq 1 \quad (2.38)$$

qui est l'équation de von KARMAN.

L'équation (2.37) donne la largeur effective à l'état de ruine. L'équation (2.38) est liée au concept de largeur effective de contraintes, où la valeur de  $\sigma_e$  varie tout simplement de 0 à  $f_y$ .

Les travaux de recherche ne se sont pas arrêtés là et on a constaté que la formulation de von KARMAN présentait deux défauts:

- a) Elle surestimait la résistance de plaques peu élancées, dont l'élancement réduit  $\lambda_{py}$  varie autour de 1;
- b) Elle surestimait la rigidité de la plaque pour des valeurs de contraintes plus petites que  $f_y$ .

Afin de trouver une formule de largeur effective plus réaliste, WINTER [22], dans les années 1940, a entrepris une vaste campagne d'essais de compression de plaques. Cette fois les essais ont été basés sur des plaques qui faisait partie intégrante de profils formés à froid et qui, par voie de conséquence, étaient soumises à toutes sortes d'imperfections inhérentes au processus de fabrication des profils. La formule suivante a été obtenue statistiquement à partir de données expérimentales:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \left( 1 - \frac{0,25}{\bar{\lambda}_p} \right) \leq 1 \quad (2.39)$$

Malgré les imperfections, on a constaté que la ruine était atteinte lorsque la contrainte  $\sigma_e$  aux bords non-chargés atteignait la limite élastique  $f_y$ , d'où il suffit de remplacer  $\bar{\lambda}_{py}$  à  $\bar{\lambda}_p$  dans l'équation (2.39).

On note que l'expression entre parenthèses du terme de droite de l'équation (2.39) prend des valeurs qui tourne autour de 0,75 pour des valeurs de  $\bar{\lambda}_p$  autour de 1 et tend vers 1 pour de grandes valeurs de  $\bar{\lambda}_p$ . Cette réduction de 25% de la largeur effective de WINTER par rapport à la largeur effective de von KARMAN dans la région  $\bar{\lambda}_p = 1$  est due aux effets néfastes des non-linéarités engendrées par les imperfections et dont les conséquences sont plus prononcées près de la charge critique (voir figure 2.11).

Beaucoup de recherches ont suivi le travail de WINTER et on peut citer les articles de GÉRARD [23] et JOMBOCK et CLARK [24] qui ont rassemblé diverses formulations théoriques et expérimentales de largeurs effectives trouvées dans la littérature de l'époque.

## II - Stabilité et ruine de plaques

Plus tard, en 1968, à la lumière d'une nouvelle étude expérimentale, WINTER [25] a proposé une expression un peu moins sévère qui consiste, dans l'équation (2.39), à remplacer le coefficient 0,25 par 0,22:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \left( 1 - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p} \right) \leq 1 \quad (2.40)$$

Les équations (2.38) et (2.40) sont dessinées à la figure 2.13. On peut constater un écartement plus important entre les deux courbes dans la région de  $\bar{\lambda}_p = 1$  et ensuite la courbe de WINTER tend asymptotiquement vers la courbe de von KARMAN pour des plaques plus élancées. Le palier initial de ces courbes caractérise l'étendue d'élancements pour lesquelles la plaque ne voile pas et est entièrement effective. Pour trouver la valeur de l'élancement limite  $\bar{\lambda}_{p0}$  (voir figure 2.13) il suffit d'égaliser à 1 l'équation (2.38) et (2.40) en y remplaçant  $\bar{\lambda}_{p0}$  à  $\bar{\lambda}_p$  et ensuite résoudre l'équation qui en résulte pour  $\bar{\lambda}_{p0}$ . Pour les équations citées  $\bar{\lambda}_{p0}$  est égal à 1 et 0,673 respectivement.

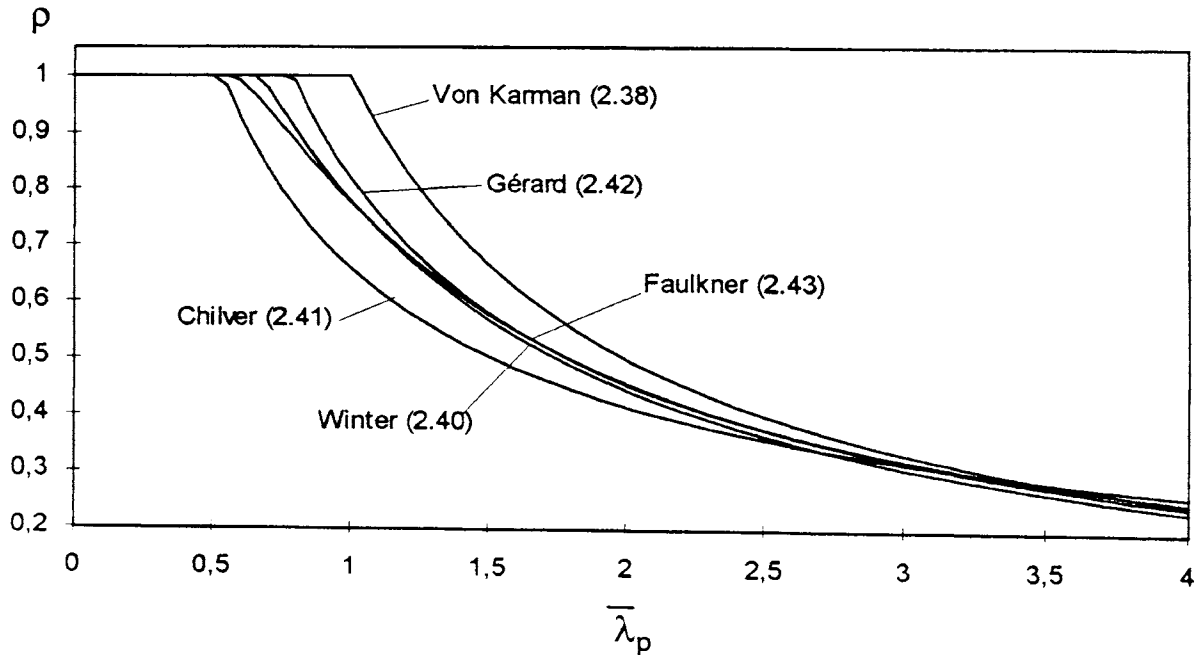


Figure 2.13. Courbes de largeurs effectives.

A titre d'illustration, on peut présenter les formules suivantes de largeur effective dues à CHILVER [26], GÉRARD [23] et FAULKNER [27]:

$$\text{CHILVER} \quad \frac{b_e}{b} = \frac{0,66}{\bar{\lambda}_p^{2/3}} \leq 1 \quad (2.41)$$

$$\text{GÉRARD} \quad \frac{b_e}{b} = \frac{0,82}{\bar{\lambda}_p^{0,85}} \leq 1 \quad (2.42)$$

$$\text{FAULKNER} \quad \frac{b_e}{b} = \frac{1,05}{\bar{\lambda}_p} \left( 1 - \frac{0,26}{\bar{\lambda}_p} \right) \leq 1 \quad (2.43)$$

qui sont aussi dessinées à la figure 2.13. Cependant, la formule de WINTER est celle qui est la plus largement utilisée. Elle a été adoptée dans les codes de plusieurs pays.

RONDAL et MAQUOI [28], dans le cadre d'une recherche concernant les profils creux en acier, ont proposé une formulation très intéressante de calcul de la largeur effective grâce à la généralisation suivante:

$$(1-\rho)(1-\rho\bar{\lambda}_p) = \eta\rho \quad (2.44)$$

où  $\eta$  est le coefficient d'imperfection généralisé qui prend la forme:

$$\eta = \beta(\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p0}) \quad (2.45)$$

et  $\beta$  est un coefficient d'imperfection qui, avec  $\bar{\lambda}_{p0}$ , définit la valeur de  $\eta$ . La solution de l'équation (2.44) donne un polynôme du deuxième degré en  $\rho$ , dont il suffit de prendre la plus petite racine positive. L'allure générale de la solution de l'équation (2.44) est montrée dans la figure 2.14.

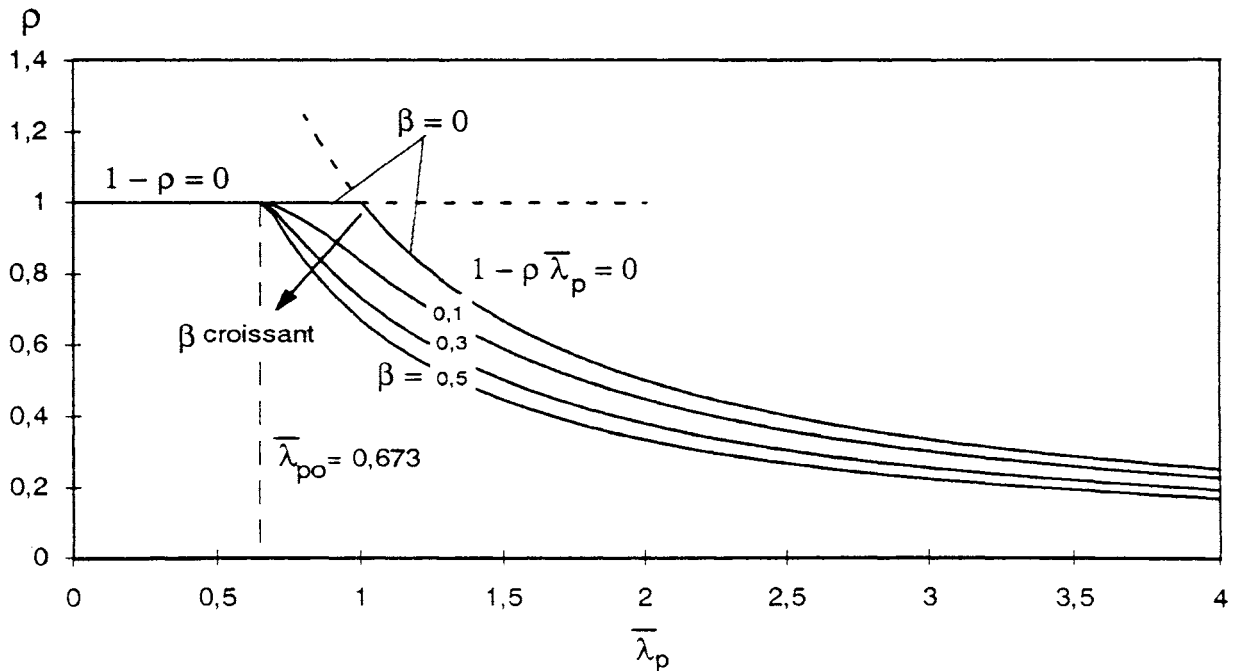


Figure 2.14- Courbe générale de largeur effective due à RONDAL et MAQUOI [28].

## II - Stabilité et ruine de plaques

Malheureusement, il n'est pas possible de trouver mathématiquement une valeur pour le coefficient  $\beta$  de manière à ajuster l'équation (2.44) à celle de WINTER, équation (2.40). De toute façon, une autre adaptation pourrait être envisagée, qui consiste à imposer que l'équation (2.44) donne la même valeur de  $\rho$  à la ruine que l'équation (2.40).

Si on appelle  $\rho_y^w$  la valeur de l'équation (2.40) de WINTER calculée avec  $\bar{\lambda}_{py}$ , on aurait pour la valeur de  $\beta$  l'expression suivante:

$$\beta = \frac{(1 - \rho_y^w)(1 - \rho_y^w \bar{\lambda}_{py})}{(\bar{\lambda}_{py} - \bar{\lambda}_{po}) \rho_y^w} \quad (2.46)$$

Une illustration de cette adaptation est montrée à la figure 2.15.

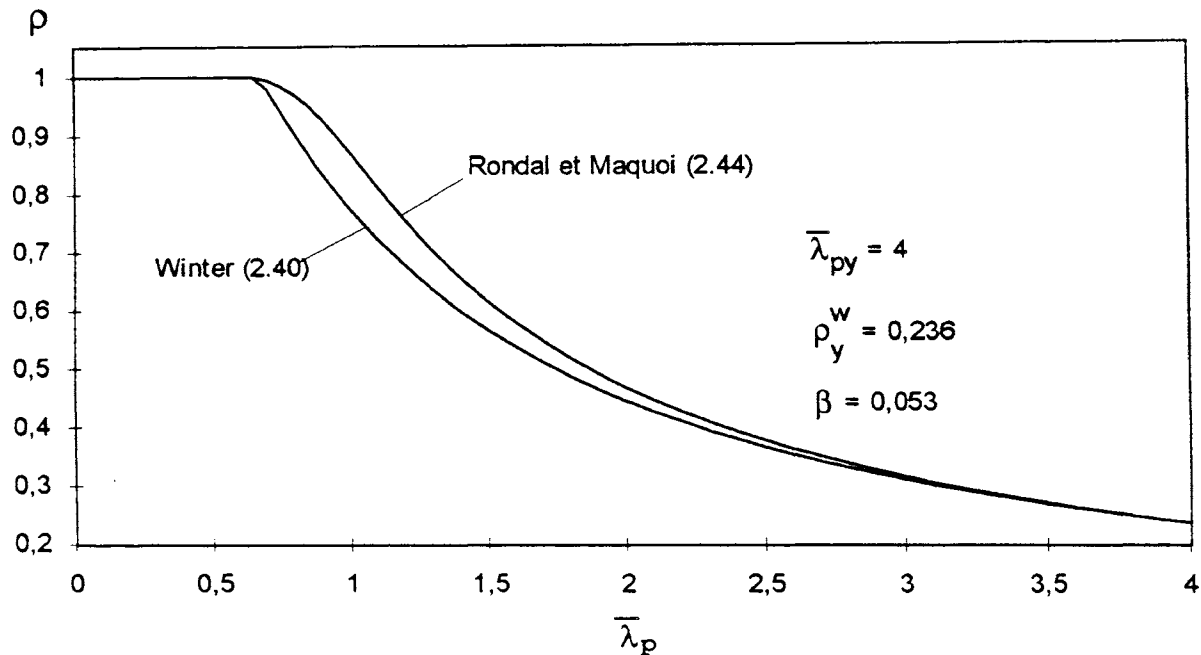


Figure 2.15- Adaptation de l'approche de RONDAL et MAQUOI à celle de WINTER.

### 2.2.3. Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre

L'étude expérimentale de plaques ayant les deux bords parallèles à la direction de la charge, simplement appuyé et libre, a été initialement entreprise par WINTER [22]. Son travail est basé sur des semelles comprimées qui faisaient partie de sections de profils formés à froid. Le plus grand rapport largeur-épaisseur ( $b/t$ ) des plaques était égal à 109. Il a suggéré que le dimensionnement des semelles doit limiter la contrainte dans celles-ci à la contrainte de voilement afin d'éviter toute distorsion de l'extrémité libre de la semelle dont l'effet visuel n'était pas acceptable à l'état de service. Cette conception de dimensionnement a été adoptée dans toutes les normes américaines jusqu'à la norme AISI-86. Malgré le voilement des semelles, WINTER a aussi pu constater qu'elles pouvaient

résister au-delà de la charge critique jusqu'à ce que la contrainte  $\sigma_{e\max}$  au bord appuyé atteigne la limite élastique  $f_y$ . Avec ce point de vue de la conception à la ruine, il a dérivé la formule de largeur effective suivante:

$$b_e = 0,8t \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \left( 1 - 0,202 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \right) \quad (2.47)$$

Cette formule a été conçue de manière à bien s'approcher des plus petites valeurs de largeurs effectives trouvées expérimentalement.

Le coefficient de voilement  $k$  d'une plaque ayant un bord libre peut varier de 0,425 quand l'autre bord est simplement appuyé, jusqu'à 1,277 si l'autre bord est encastré. KALYANARAMAN [29] a adopté une valeur de  $k$  égal à 0,5 et avec cette valeur il a réécrit l'équation (2.47) sous une nouvelle forme:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{1,19}{\lambda_p} \left( 1 - \frac{0,3}{\lambda_p} \right) \leq 1 \quad (2.48)$$

En se basant sur des résultats expérimentaux et une étude analytique du comportement post-critique, Kalyanaraman a proposé la formule suivante de largeur effective:

$$\rho = \frac{b_e}{b} = \frac{1,19}{\lambda_p} \left( 1 - \frac{0,298}{\lambda_p} \right) \leq 1 \quad (2.49)$$

Cette nouvelle équation, plus rigoureuse, diffère à peine de l'équation (2.48) où le coefficient 0,3 est changé en 0,298. Une comparaison graphique entre l'équation (2.49) et celle due à Winter (2.40) est montrée à la figure 2.16.

Dans ces essais, Kalyanaraman a constaté que le déplacement transversal (hors du plan) de l'extrémité libre des semelles les plus élancées ( $b/t \cong 58$ ) ne dépassait pas 2,5 fois l'épaisseur de la semelle lors de la ruine. Cette distorsion étant modérée, il préconise le dimensionnement à la ruine au moyen de la formule (2.49) sans aucun égard à la distorsion à l'état de service.

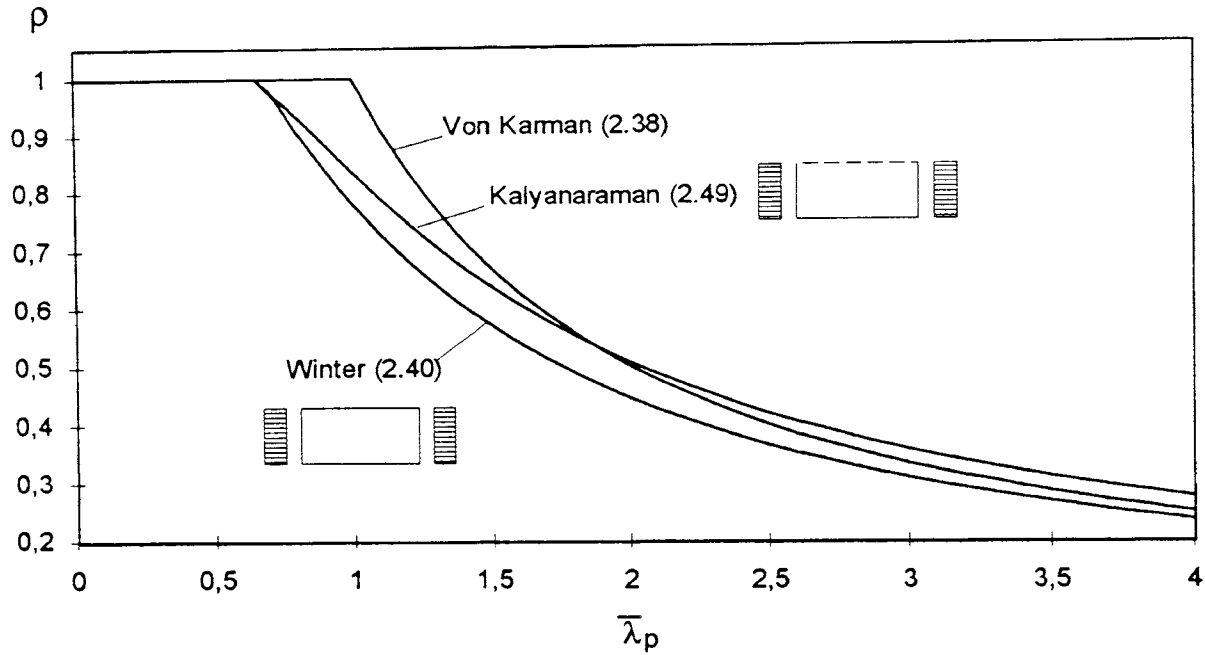


Figure 2.16- Comparaison de courbes de largeur effective.

#### 2.2.4. Cas de charge de compression uniformément variable

Jusqu'ici, on a traité le cas de plaques soumises à un diagramme de contraintes uniforme et constant. Toutefois ce n'est pas toujours le cas en pratique, et il va falloir envisager un traitement semblable à celui de la charge centrée quand la plaque est soumise à une charge variable linéairement le long des bords chargés.

RHODES, HARVEY et FOK [15] ont fait l'étude analytique de plaques initialement imparfaites et soumises à une charge excentrée. Pour une plaque simplement appuyée aux quatre bords et dont la charge excentrée est appliquée au moyen de barres rigides comme montré à la figure 2.17, ils ont obtenu la formule suivante pour le calcul de la charge de ruine théorique  $P_{r,th}$ :

$$\frac{P_{r,th}}{f_y b t} = \frac{k_y + 11,4}{k_y \left( 6 \frac{e_p}{b} + 3,85 \right)} \quad (2.50)$$

où  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$  est la rigidité de la plaque en flexion,  $k_y = f_y b^2 t / \pi^2 D$  et  $e_p$  est l'excentricité de la charge (voir figure 2.17). L'équation (2.50) est valable si:

$$k_y > 8 \left[ 3 \frac{e_p}{b} + \frac{1}{2} \right] \quad (2.51)$$



Si cette condition n'est pas satisfaite, la plaque ne voile pas et atteint la ruine par écoulement plastique. L'équation (2.50) a été établie en considérant que la ruine se produit lorsque la contrainte maximum au bord non-chargé ( $\sigma_{e\max}$ ) atteint la limite élastique  $f_y$ . Cette formule est en excellent accord avec les résultats expérimentaux. Cependant, ces auteurs n'ont pas envisagé de développer une approche de largeur effective de manière à représenter leurs résultats analytiques.

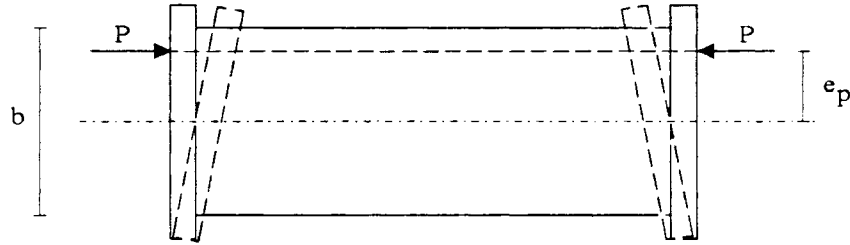


Figure 2.17- Plaque simplement appuyée soumise à une charge excentrée.

Toujours, pour une plaque simplement appuyée aux quatre bords et soumise à une charge excentrée, THOMASSON [30] a fait une proposition semi-empirique pour le calcul de largeurs effectives. La notation utilisée et la répartition des largeurs effectives sont illustrées à la figure 2.18, où  $\sigma_1$  est toujours une contrainte de compression. Sa formulation est basée sur les hypothèses suivantes:

- a) La théorie classique de la résistance des matériaux est supposée valable;
- b) Les largeurs effectives sont uniquement déterminées à partir des contraintes aux bords  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et;
- c) La ruine se produit lorsque la contrainte au bord le plus sollicité en compression atteint  $f_y$ .

Les formules proposées par THOMASSON pour le calcul et la répartition de largeur effective sont données au tableau 2.2. On remarque que la formule pour le calcul de  $b_e/b$  a la même forme que l'expression de von KARMAN:

$$\frac{b_e}{b} = 1,9 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_1}} \quad (2.52)$$

avec  $k = 4$ . La seule différence réside dans le coefficient de 1,52 (THOMASSON) et 1,9 (von KARMAN).

THOMASSON a comparé les résultats de charge de ruine obtenus par sa proposition de largeurs effectives avec ceux obtenus par l'équation (2.50). Il a constaté que ses résultats étaient toujours conservatifs par rapport à l'équation (2.50). En plus, il a aussi remarqué que les charges de ruine obtenues par sa proposition étaient d'autant plus conservatives, par rapport à l'équation (2.50), que l'excentricité de la charge était plus grande et que la plaque était plus élancée ( $b/t$  plus grand). A la suite de ces constatations,

THOMASSON a décidé de modifier sa proposition originale en remplaçant par 1,9 le coefficient 1,52 dans la formule de  $b_e/b$  (voir tableau 2.2), c'est à dire, d'utiliser l'expression (2.52) de von KARMAN. Cette nouvelle proposition est en meilleur accord avec l'équation (2.50).

Toujours dans le même but, USAMI [12] a utilisé une approche analytique de la résolution du problème des équations non-linéaires de von KARMAN par la méthode semi-énergétique (voir section 2.1.3 de cette thèse) afin d'en déduire des formules de calcul et de répartition de la largeur effective pour la plaque simplement appuyée aux quatre bords et soumise à une charge excentrée. Sa proposition est donnée au tableau 2.2 avec les notations de la figure 2.18.

Une comparaison graphique des répartitions de la largeur effective due à THOMASSON et USAMI est aussi illustrée à la figure 2.19.

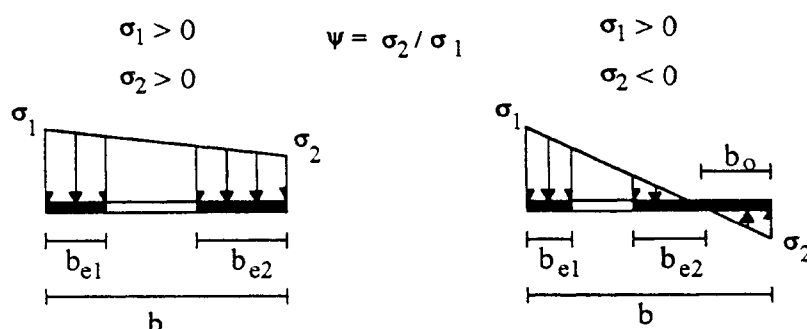


Figure 2.18- Notation et répartition des largeurs effectives.

DEWOLF et GLADDING [31] ont réalisé à une recherche expérimentale afin de trouver une formule de largeur effective d'âmes de profils formés à froid soumis à une sollicitation de flexion pure. Leur distribution de contraintes est celle montrée à la figure 2.20 où on voit que l'hypothèse classique de BERNOULLI de sections planes après déformation n'est plus valable. La largeur effective  $b_e$  de la partie comprimée de l'âme à la ruine est donnée par la formule suivante:

$$\frac{b_e}{b_c} = \frac{0,7}{\bar{\lambda}_{py}} \quad (2.53)$$

où  $b_c$  est la partie comprimée de l'âme calculée selon l'axe neutre de la section totale et  $\bar{\lambda}_{py}$  est calculé avec un coefficient de voilement  $k$  qui tient compte du gradient de contraintes (voir paragraphe 2.1.2 de cette thèse).

Calcul et répartition des largeurs effectives $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$		Thomasson [30]	Usami [12]
		$\frac{b_e}{b} = 1,52 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_1}}$	$\frac{b_e}{b} = \frac{1}{\lambda_p} \left( 1 - \frac{0,22}{\lambda_p} \right), \quad k = 4$
$0 < \psi < 1$	$\frac{b_{e1}}{b_e}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{b_{e2}}{b_e}$	$\frac{1}{2}(1,5 - 0,5\psi)$	$\frac{1}{2}(1,44 - 0,44\psi)$
$\psi \leq 0$	$\frac{b_{e1}}{b_e}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{b_{e2}}{b_e}$	$\frac{1}{2}1,5$	$\frac{1}{2}1,44$

Tableau 2.2- Calcul et répartition des largeurs effectives pour la plaque simplement appuyée aux quatre bords et soumise à une charge excentrée.

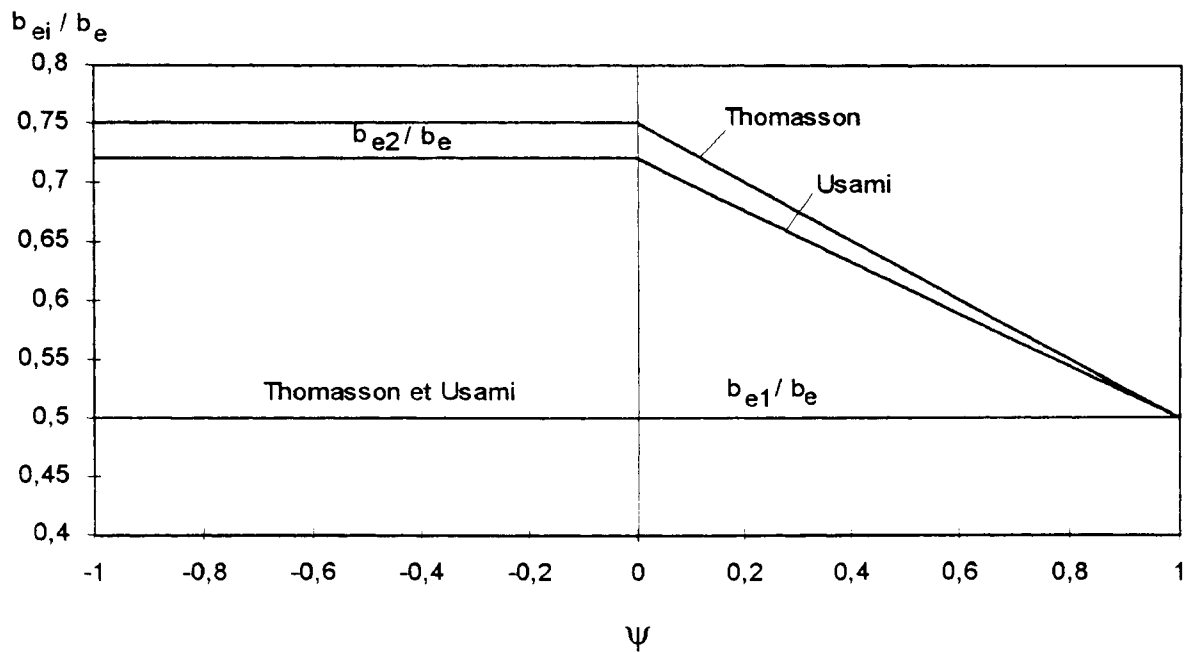


Figure 2.19- Répartition des largeurs effectives.

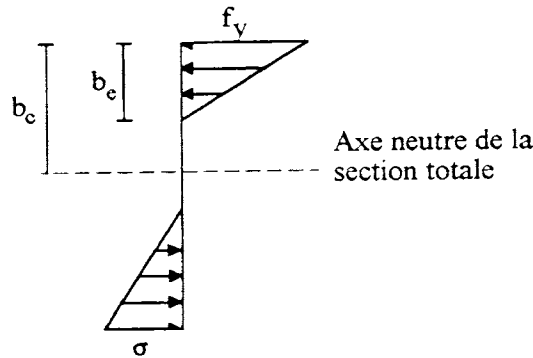


Figure 2.20- Largeur effective d'âme de section soumise à la flexion pure, due a DEWOLF et GLADDING [31].

Malgré les limitations du travail de DEWOLF et GLADDING dans le cadre de cette thèse, ils y avancent certaines idées qui sont, à notre avis, fondamentales pour le calcul de la largeur effective de plaques soumises à une charge excentrée. La largeur effective  $b_e$  est calculée par rapport à la largeur comprimée  $b_c$  de la plaque quand  $\psi < 0$ , d'une part, et la contrainte critique de voilement est calculée avec un coefficient  $k$  qui tient compte du gradient de contraintes, d'autre part. Au contraire, THOMASSON et USAMI utilisent toujours un coefficient de voilement  $k$  égal à 4 et leur largeur effective  $b_e$  est calculée par rapport à la largeur totale  $b$  de la plaque (voir tableau 2.2 et équation 2.52).

Enfin, dans le cas de plaques avec l'un des bords non-chargés libre, l'analyse du problème devient plus complexe et difficile, et il existe actuellement très peu de résultats dans la littérature. Il faut donc se contenter des propositions semi-empiriques données dans les normes actuelles qui seront présentées plus loin dans ce chapitre.

### 2.3. LE COMPORTEMENT SOUS-ULTIME DE PLAQUES

La formule (2.40) de WINTER donne généralement de bonnes prévisions théoriques de la charge de ruine de tronçons courts et de colonnes de profils formés à froid, quand  $\sigma_{e\max} = f_y$ . Toutefois, bien que WINTER ait utilisé des données de largeurs effectives mesurées en état sous-ultime (ou de service), lors de ses essais, pour dériver sa formule semi-empirique; des recherches plus récentes montrent que sa formule sous-estime très fortement la rigidité de la plaque à l'état de service ( $\sigma_{e\max} < f_y$ ). Des chercheurs comme DEWOLF, PEKOZ et WINTER [32], THOMASSON [30], MULLIGAN [33] et MULLIGAN et PEKOZ [34,35] ont simulé l'interaction entre le voilement local et le flambement global à l'aide de la méthode des largeurs effectives et leurs résultats ont confirmé l'inadéquation de la formule de WINTER lors de prévisions théoriques du comportement de tronçons courts et de colonnes à l'état de service.

DAWSON et WALKER [36] ont abordé ce problème en détail et la discussion suivante est tirée de leur article. La formule de WINTER ne devrait pas être utilisée pour des niveaux de contraintes  $\sigma_e$  plus petits que  $f_y$ . En effet, la contrainte  $\sigma_e$  varie le long des bords non-chargés (voir figure 2.12) et ainsi la rigidité longitudinale de la plaque, qui est une fonction du raccourcissement de la plaque dans la direction de la charge, est un effet intégré le long de la longueur de la plaque et doit dès lors dépendre de la contrainte moyenne  $\sigma_{em}$  aux bords non-chargés (voir équation 2.27), d'une part, et la ruine est atteinte lorsque la contrainte maximum  $\sigma_{emax}$  aux bords non-chargés (voir figure 2.12) atteint la limite élastique  $f_y$  (voir équation 2.28), ce qui est un phénomène local, d'autre part. Il semble que toute la différence entre le concept de largeur effective de déformations (équation 2.27) et le concept de largeur effective de contraintes (équation 2.28) a été ignoré dans le travail de WINTER.

Afin de résoudre ce problème, THOMASSON [30] a fait une nouvelle proposition de courbes de largeur effective, comme montré à la figure 2.21 avec un graphique du type  $(S = \sigma_m / \sigma_{cr})$  par rapport à  $(\bar{\lambda}_p^2 = \epsilon_e / \epsilon_{cr})$  (voir équations 2.31 et 2.34). Dans cette figure, la courbe 'a' est la solution théorique d'une plaque parfaite et constitue une borne supérieure de la réponse de la plaque, la courbe pointillée est la solution exacte de YAMAKI [10] pour une plaque avec une imperfection initiale  $w_0$  égale à 0,1t, la courbe 'b' est une approximation de la courbe pointillée de YAMAKI, et la courbe 'c' est une approximation de la formule de WINTER. L'idée est de prendre la solution de YAMAKI pour le comportement post-critique initial de la plaque et, en même temps, de définir la ruine de la plaque par la formule de WINTER. Pour y arriver, on passe par une courbe de transition 'd' pour faire le passage à la ruine.

## II - Stabilité et ruine de plaques

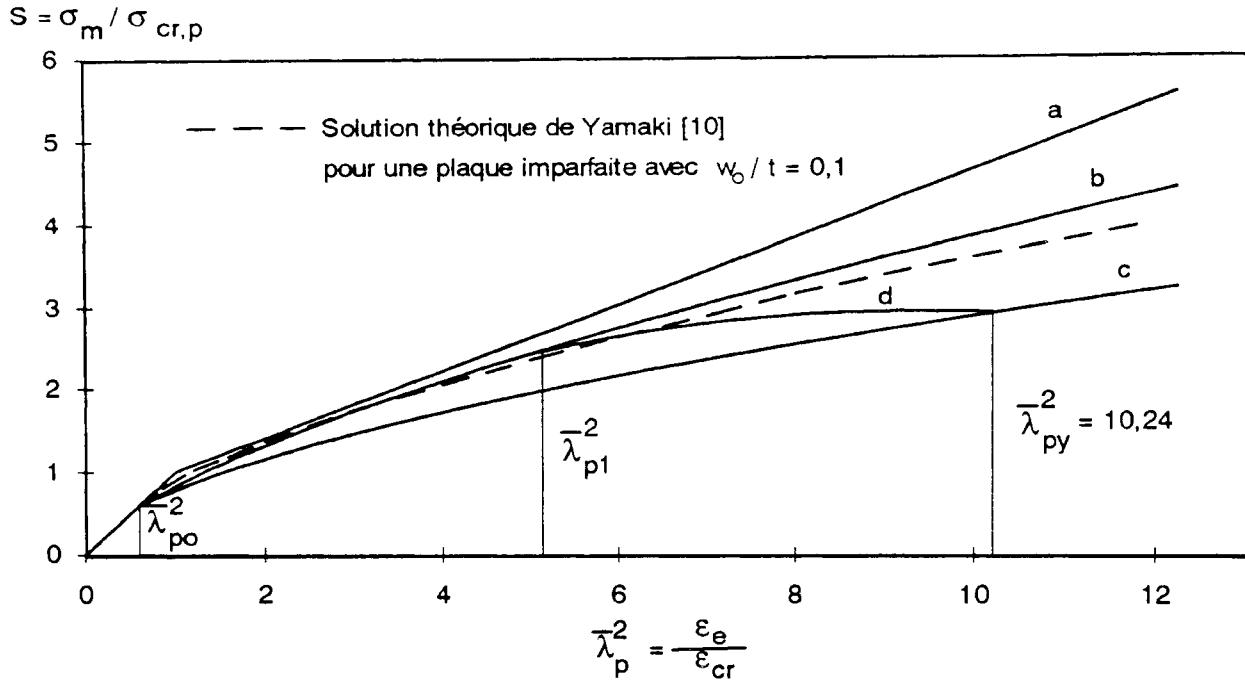


Figure 2.21- Proposition de THOMASSON [30] pour le comportement d'une plaque en état de service post-critique.

Les largeurs effectives associées sont données à la figure 2.22 et leurs formules sont les suivantes:

Courbe b :  $\rho = \frac{b_e}{b} = 0,827 \bar{\lambda}_p^{(-0,662)} \leq 1 \quad \bar{\lambda}_p > 0,75$  (2.54)

Courbe c :  $\rho = \frac{b_e}{b} = 0,78 \bar{\lambda}_p^{(-0,864)} \leq 1 \quad \bar{\lambda}_p > 0,75$  (2.55)

Courbe d :  $\rho = \frac{b_e}{b} = \rho_1 + \frac{\rho_y - \rho_1}{\bar{\lambda}_{py} - \bar{\lambda}_{p1}} (\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p1}) \leq 1 \quad \bar{\lambda}_{p1} < \bar{\lambda}_p < \bar{\lambda}_{py}$  (2.56)

où la paire  $(\bar{\lambda}_{p1}, \rho_1)$  est le point d'intersection entre la courbe 'b' et la courbe de transition 'd'. L'abscisse  $\bar{\lambda}_{p1}$  est donnée par :

$$\bar{\lambda}_{p1} = 0,3 + 0,6 \bar{\lambda}_{py} \quad (2.57)$$

THOMASSON [30] a comparé sa proposition pour le calcul de largeur effective avec les résultats expérimentaux de KÖNIG [37] et on peut constater une très bonne corrélation entre eux.

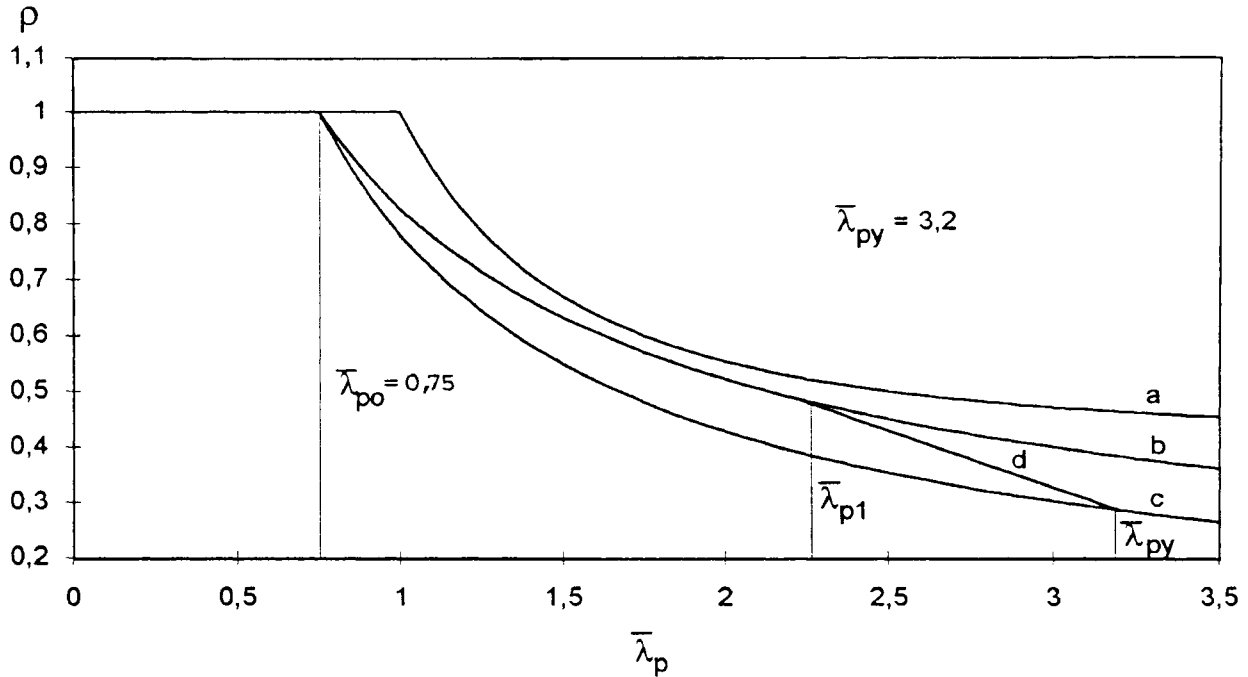


Figure 2.22- Proposition de THOMASSON [30] pour le calcul de largeur effective.

Malgré les bonnes prévisions théoriques données par cette proposition, il y a deux remarques à faire :

- La courbe du type  $(S = \sigma_{m\sigma}/\sigma_{cr}) \times (\bar{\lambda}_p^2 = \varepsilon_e/\varepsilon_{cr})$  (voir figure 2.21) présente 2 points de discontinuité de la dérivée de  $S$  par rapport à  $\bar{\lambda}_p^2$   $\left(\partial S/\partial(\bar{\lambda}_p^2)\right)$  localisés aux abscisses  $\bar{\lambda}_p^2 = \bar{\lambda}_{po}^2$  et  $\bar{\lambda}_p^2 = \bar{\lambda}_{pl}^2$  qui sont le passage de l'état pré-voilé au stade post-voilé et la transition de la courbe 'b' à la courbe 'd';
- La courbe 'd' de transition de la courbe 'b' à l'état de ruine de la plaque présente son sommet avant l'intersection avec la courbe 'c' et ce fait est d'autant plus perceptible que la plaque est plus élancée ( $\bar{\lambda}_{py}$  plus grand). Autrement dit, la proposition de THOMASSON prescrit que la ruine de la plaque se produit en régime élastique ( $\sigma_e < f_y$ ), alors qu'on sait que la ruine de plaques est atteinte lorsque  $\sigma_e = f_y$ .

Dans une recherche plus récente, MULLIGAN [33] et MULLIGAN et PEKOZ [35] ont revu la proposition de THOMASSON et ont fait une nouvelle proposition pour le calcul de la largeur effective de la plaque à l'état de service en régime post-critique afin d'éliminer les défauts que présentait la proposition de THOMASSON, déjà cités plus haut.

## II - Stabilité et ruine de plaques

Leur idée se trouve illustrée à la figure 2.23 dans un graphique du type  $S \times \bar{\lambda}_p$ . Avant toute chose, il s'avère nécessaire d'expliquer certains détails de cette figure. Le morceau de courbe entre  $\bar{\lambda}_p = 0$  et  $\bar{\lambda}_{po} = 0,673$  constitue l'étendue d'élancements de la plaque pré-voilée ( $\rho = b_e/b = 1$ ) et à l'aide de l'équation (2.34) son expression est donnée par:

$$S = \bar{\lambda}_p^2 \quad (2.58)$$

L'équation de WINTER (2.40) mise sous la forme de l'équation (2.34) prend la forme suivante:

$$S_w = \bar{\lambda}_p - 0,22 \quad (2.59)$$

$$S = \sigma_m / \sigma_{cr,p}$$

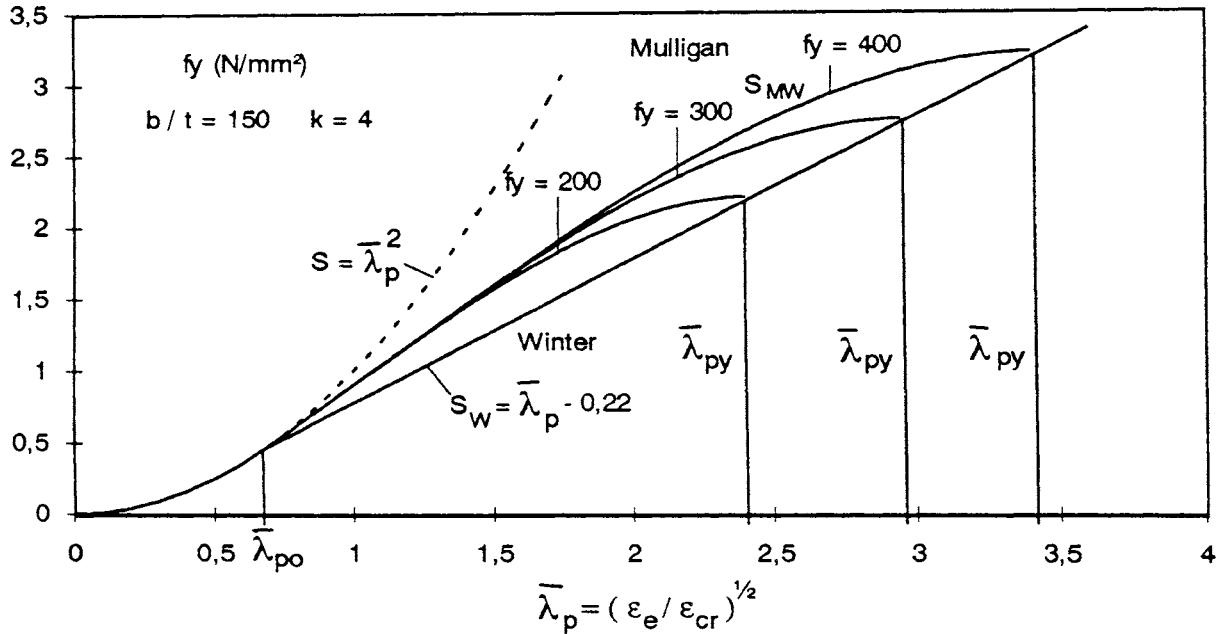


Figure 2.23- Proposition de MULLIGAN et PEKOZ [33,35] pour le comportement d'une plaque en état de service post-critique.

Leur approche constitue à faire passer une courbe qui va du passage de l'état pré-voilé au stade voilé ( $\bar{\lambda}_{po} = 0,673$ ) jusqu'au sommet de la ruine donnée par la formule de WINTER. Pour y arriver, il suffit de prendre un polynôme cubique de la forme suivante :

$$S_{MW} = A_{W1} + A_{W2}\bar{\lambda}_p + A_{W3}\bar{\lambda}_p^2 + A_{W4}\bar{\lambda}_p^3 \quad 0,673 < \bar{\lambda}_p \leq \bar{\lambda}_{py} \quad (2.60)$$

et y imposer les conditions suivantes aux limites en  $\bar{\lambda}_{po}$  et  $\bar{\lambda}_{py}$ :

$$S_{MW}(\bar{\lambda}_{po}) = \bar{\lambda}_{po}^2 \quad (2.61a)$$



$$S'_{MW}(\bar{\lambda}_{po}) = 2\bar{\lambda}_{po} \quad (2.61b)$$

$$S_{MW}(\bar{\lambda}_{py}) = S_W(\bar{\lambda}_{py}) \quad (2.61c)$$

$$S'_{MW}(\bar{\lambda}_{py}) = 0 \quad (2.61d)$$

pour lesquelles on trouve les coefficients suivants de l'équation (2.60):

$$A_{W4} = \frac{2[(1 - \bar{\lambda}_{po})\bar{\lambda}_{py} - 0,22]}{(\bar{\lambda}_{po} - \bar{\lambda}_{py})^3} \quad (2.62a)$$

$$A_{W3} = \frac{\bar{\lambda}_{po}}{\bar{\lambda}_{po} - \bar{\lambda}_{py}} - 1,5A_{W4}(\bar{\lambda}_{py} + \bar{\lambda}_{po}) \quad (2.62b)$$

$$A_{W2} = -\bar{\lambda}_{py}(2A_{W3} + 3A_{W4}\bar{\lambda}_{py}) \quad (2.62c)$$

$$A_{W1} = \bar{\lambda}_{po}^2 \left( 1 - \frac{A_{W2}}{\bar{\lambda}_{po}} - A_{W3} - \bar{\lambda}_{po}A_{W4} \right) \quad (2.62d)$$

Finalement, en combinant les équations (2.34) et (2.60), on a pour le calcul de la largeur effective l'expression suivante:

$$\rho_{MW} = \frac{b_e}{b} = \frac{A_{W1}}{\bar{\lambda}_p^2} + \frac{A_{W2}}{\bar{\lambda}_p} + A_{W3} + A_{W4}\bar{\lambda}_p \leq 1 \quad 0,673 < \bar{\lambda}_p \leq \bar{\lambda}_{py} \quad (2.63)$$

dont une représentation graphique et une comparaison avec la formule de WINTER sont montrées à la figure 2.24.

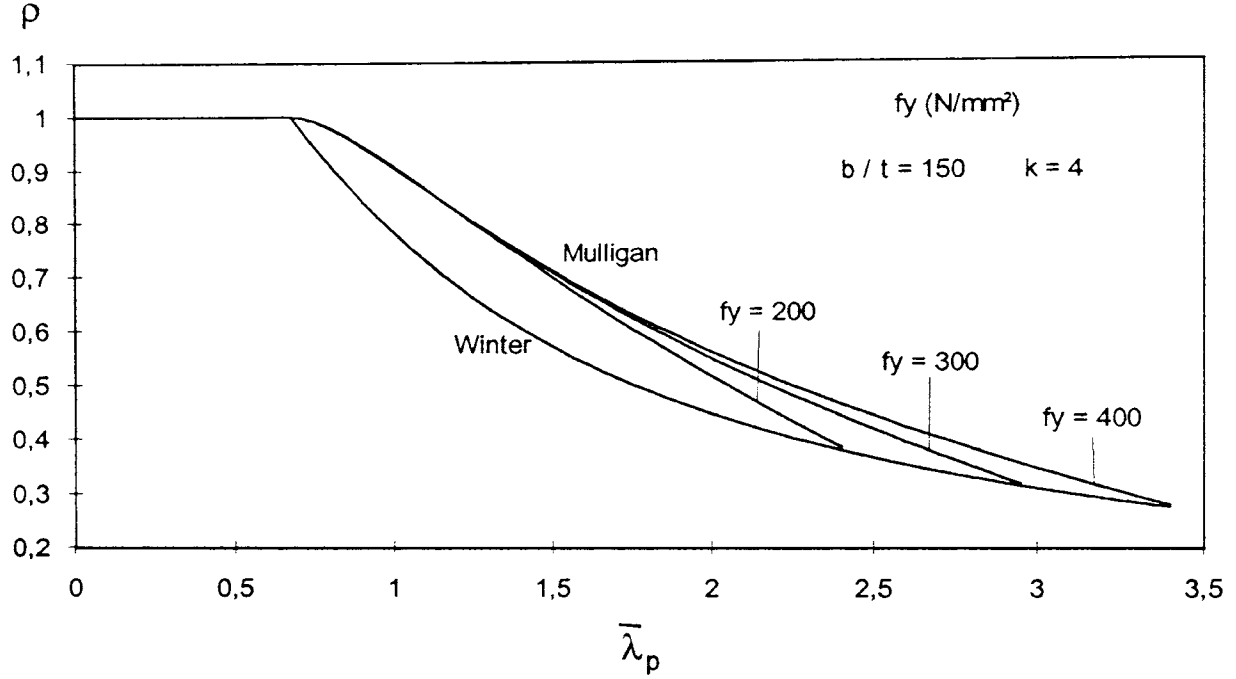


Figure 2.24- Proposition de MULLIGAN et PEKOZ [33,35] pour le calcul de la largeur effective.

De même, on pourrait envisager d'appliquer cette nouvelle approche pour la formule (2.49) de KALYANARAMAN pour les plaques appuyées sur un seul bord. Dans ce cas, l'équation (2.49) combinée avec (2.34) devient:

$$S_K = 1,19(\bar{\lambda}_p - 0,298) \quad (2.64)$$

Similairement au cas précédent,  $S_{MK}$  prend la forme suivante:

$$S_{MK} = A_{K1} + A_{K2}\bar{\lambda}_p + A_{K3}\bar{\lambda}_p^2 + A_{K4}\bar{\lambda}_p^3 \quad 0,673 < \bar{\lambda}_p \leq \bar{\lambda}_{py} \quad (2.65)$$

avec les conditions suivantes aux limites:

$$S_{MK}(\bar{\lambda}_{p0}) = \bar{\lambda}_{p0}^2 \quad (2.66a)$$

$$S'_{MK}(\bar{\lambda}_{p0}) = 2\bar{\lambda}_{p0} \quad (2.66b)$$

$$S_{MK}(\bar{\lambda}_{py}) = S_K(\bar{\lambda}_{py}) \quad (2.66c)$$

$$S'_{MK}(\bar{\lambda}_{py}) = 0 \quad (2.66d)$$

et, on a pour les coefficients de l'équation (2.65):

$$A_{K4} = \frac{2[(1,19 - \bar{\lambda}_{po})\bar{\lambda}_{py} - 0,3546]}{(\bar{\lambda}_{po} - \bar{\lambda}_{py})^3} \quad (2.67a)$$

$$A_{K3} = \frac{\bar{\lambda}_{po}}{\bar{\lambda}_{po} - \bar{\lambda}_{py}} - 1,5A_{K4}(\bar{\lambda}_{py} + \bar{\lambda}_{po}) \quad (2.67b)$$

$$A_{K2} = -\bar{\lambda}_{py}(2A_{K3} + 3A_{K4}\bar{\lambda}_{py}) \quad (2.67c)$$

$$A_{K1} = \bar{\lambda}_{po}^2 \left( 1 - \frac{A_{K2}}{\bar{\lambda}_{po}} - A_{K3} - \bar{\lambda}_{po}A_{K4} \right) \quad (2.67d)$$

et la largeur effective est donnée par l'expression suivante:

$$\rho_{MK} = \frac{b_e}{b} = \frac{A_{K1}}{\bar{\lambda}_p^2} + \frac{A_{K2}}{\bar{\lambda}_p} + A_{K3} + A_{K4}\bar{\lambda}_p \leq 1 \quad 0,673 < \bar{\lambda}_p \leq \bar{\lambda}_{py} \quad (2.68)$$

Par soucis de simplification du langage dans le cadre de cette thèse, on appellera désormais l'équation (2.68) de combinaison Mulligan+Kalyanaraman.

Dans la figure 2.25 on trouve une comparaison entre les courbes de Kalyanaraman, équation (2.49), et la combinaison Mulligan+Kalyanaraman, équation (2.68). La raison de la présence d'une troisième courbe dans cette figure appelée 'parabole' sera expliquée un peu plus tard. Sur l'axe des abscisses, on trouve cette fois le rapport  $\sigma_e/f_y$  au lieu de l'élancement réduit de plaque  $\bar{\lambda}_p$ , de manière à expliciter le rapport  $b/t$  de la plaque, le coefficient de voilement  $k$  et la limite élastique  $f_y$  qui vaut ici 355 N/mm<sup>2</sup>, qui est la limite élastique de l'acier le plus couramment utilisé dans la fabrication de profils formés à froid. Toutes ces variables sont aussi données sur cette figure.

Malheureusement, la combinaison Mulligan+Kalyanaraman présente une allure indésirable lorsque la plaque est très peu élancée, comme celle montrée à la figure 2.26, avec un rapport  $b/t$  égal à 15. Utiliser une approche pareille pour modéliser le comportement de plaques appuyées sur un seul bord, reviendrait en fait à avoir le palier  $\rho = 1$ , de la plaque non-voilée, beaucoup plus large que celui dicté par l'élancement limite  $\bar{\lambda}_{po}$ . Ce fait est d'autant plus important que l'élancement réduit de la plaque à la ruine  $\bar{\lambda}_{py}$  s'approche de  $\bar{\lambda}_{po}$  et provient du fait qu'on a choisi une interpolation cubique pour représenter  $S = \sigma_m/\sigma_{cr,p}$  en fonction de  $\bar{\lambda}_p$  en imposant une dérivée nulle à la ruine, comme montré à la figure 2.27.

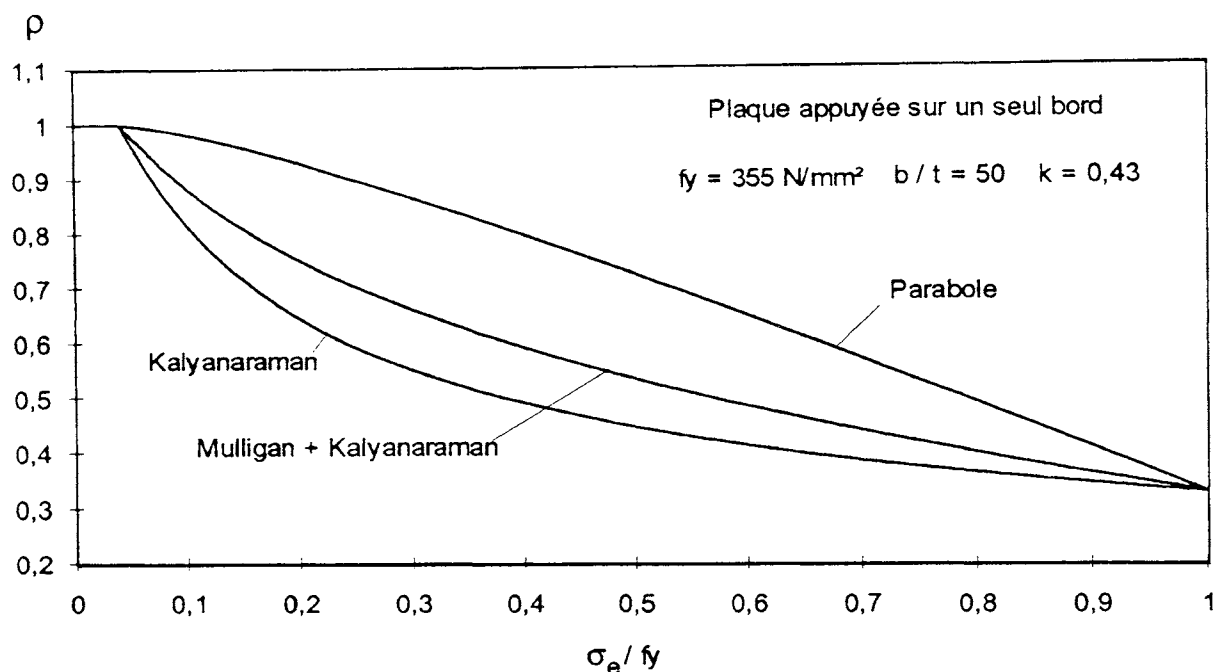


Figure 2.25- Largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord avec  $b/t = 50$ .

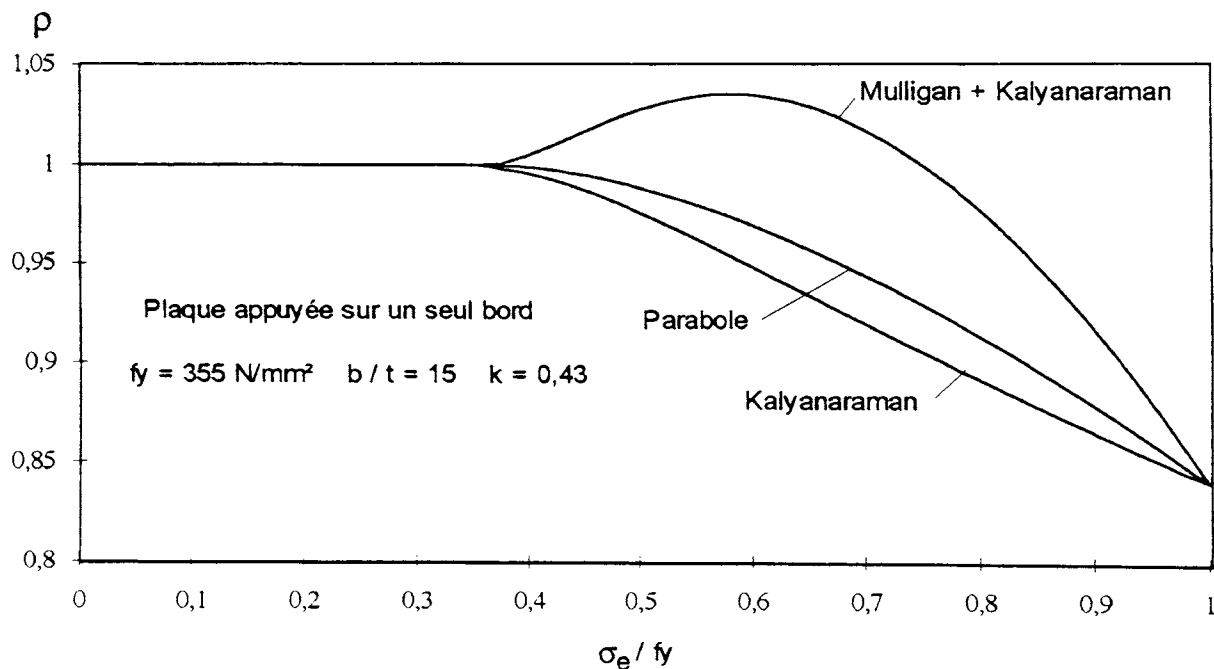


Figure 2.26- Largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord avec  $b/t = 15$ .

Pour contourner ce problème, on propose de faire passer une courbe du deuxième degré (une parabole) pour représenter  $\rho = b_e/b$  en fonction de  $\bar{\lambda}_p$ , quand la plaque est peu élancée. On voit tout de suite que cette parabole doit passer par les points  $(\bar{\lambda}_{p0}, \rho = 1)$ , fin du palier pré-voilé, et  $(\bar{\lambda}_{py}, \rho_y^K)$ , ruine; où  $\rho_y^K$  est la valeur obtenue à partir de l'équation

(2.49) de Kalyanaraman, en y remplaçant  $\bar{\lambda}_{py}$  à  $\bar{\lambda}_p$ . Elle est aussi construite de manière à ce que son côté convexe soit tourné vers le haut et dont le sommet soit le point  $(\bar{\lambda}_{po}, \rho = 1)$ , ce qui impose qu'elle ait la forme générale suivante:

$$(\rho_p - 1) = C(\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{po})^2 \quad (2.69)$$

Avec la condition de passage par la deuxième point  $(\bar{\lambda}_{py}, \rho_y^K)$ , on trouve la valeur de la constante C de l'équation (2.69) qui prend finalement la forme suivante:

$$\rho_p = \frac{\rho_y^K - 1}{(\bar{\lambda}_{py} - \bar{\lambda}_{po})^2} (\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{po})^2 + 1 \quad (2.70)$$

et dont la représentation graphique est illustrée aux figures 2.25, 2.26 et 2.27.

$S = \sigma_m / \sigma_{cr,p}$

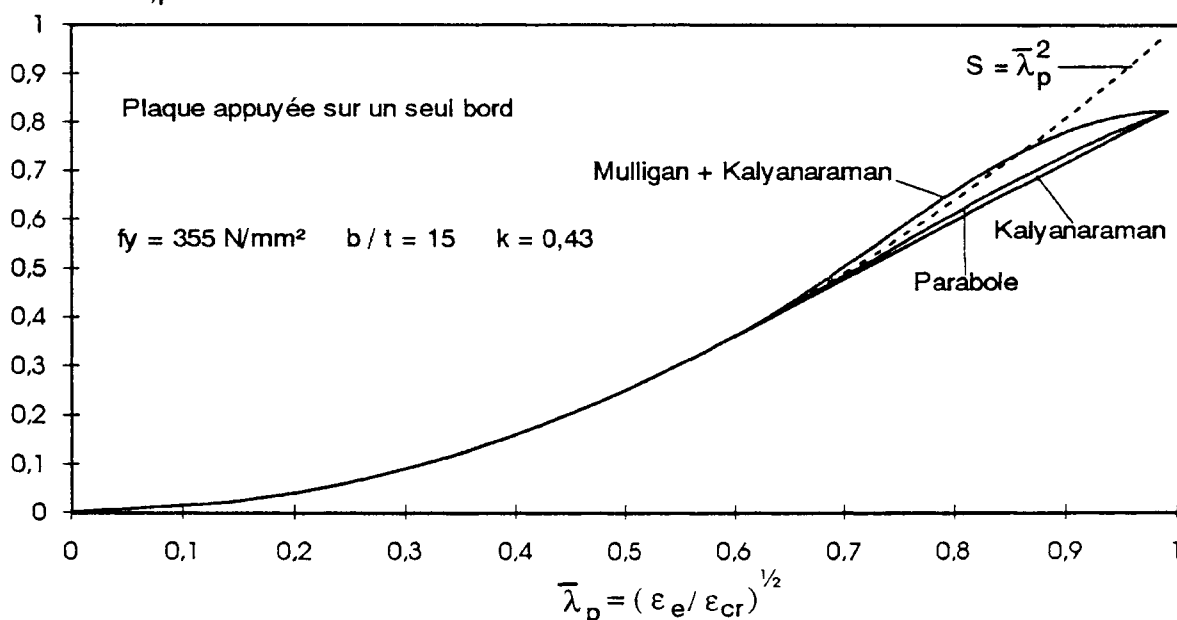


Figure 2.27- Diagramme contrainte x déformation de la plaque appuyée sur un seul bord avec  $b/t = 15$ .

Comme il n'y a aucune ressemblance mathématique entre la combinaison Mulligan+Kalyanaraman, équation (2.68), et la parabole, équation (2.70), il est impossible de déterminer la valeur de l'élancement réduit à la ruine  $\bar{\lambda}_{py}$  pour laquelle les deux courbes coïncident, afin de savoir si on doit utiliser l'une ou l'autre formulation. De toute façon, on voit dans les figures 2.25 et 2.26 que si on calcule la largeur effective au moyen des deux formulations, en prenant la plus petite, on tombera toujours sur la bonne courbe.

Dans le cas où les courbes des deux formulations sont suffisamment proches pour se croiser, comme montré à la figure 2.28 pour une plaque avec  $b/t = 26$ , le fait de prendre la valeur la plus petite, fait passer d'une courbe à l'autre, ce qui ne semble pas détériorer la qualité des résultats à cause de la proximité des deux courbes.

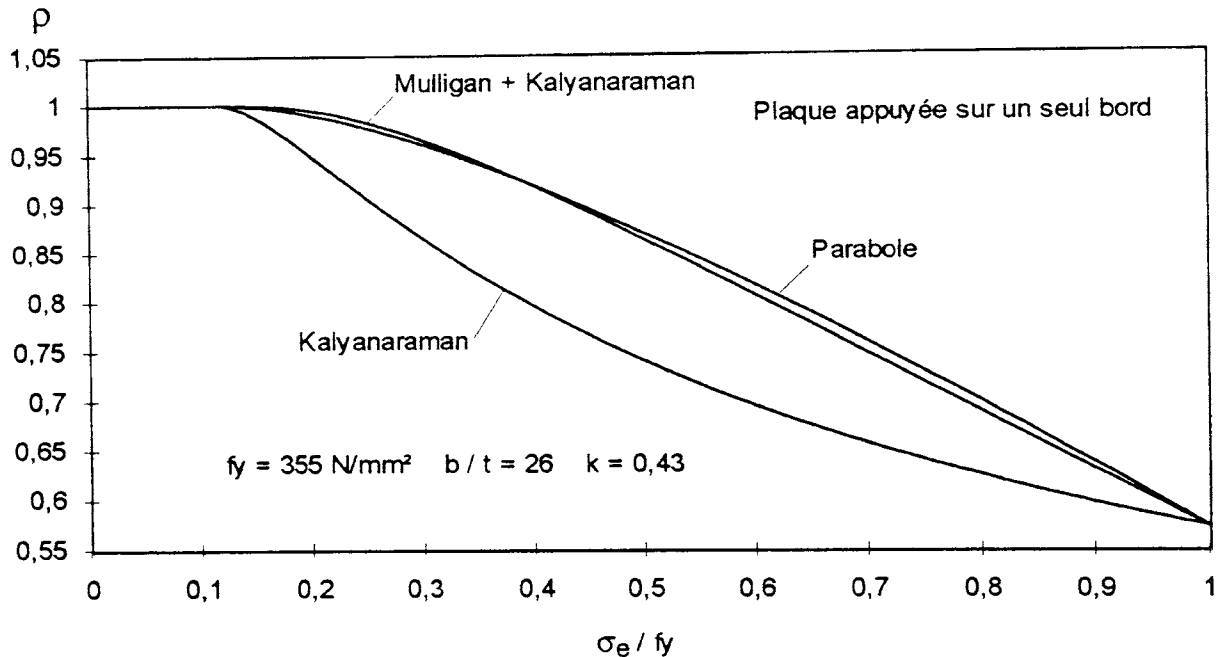


Figure 2.28- Largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord avec  $b/t = 26$ .

L'approche qu'on vient de voir s'est avérée nécessaire dans la cadre de cette thèse à cause des semelles des profils du type 'U' et de cornières très peu élancées qu'on trouve en pratique et dont les résultats expérimentaux ont été comparés aux résultats théoriques de cette thèse.

Dans le cas d'une plaque simplement appuyée aux quatre bords, il est évident que la combinaison Mulligan+Winter produit le même problème quand la plaque est très peu élancée et, dans ce cas, la méthodologie à appliquer reste tout à fait semblable à celle qu'on vient de voir.

## 2.4. STABILITE DE SECTIONS OU DE PLAQUES ASSOCIEES

### 2.4.1. Généralités

Dans le paragraphe 2.1.2 on a abordé le problème de la stabilité de plaques isolées. Néanmoins, dans le cadre de profils à parois minces il faut considérer, pour le voilement, l'interaction entre les plaques qui composent la section transversale. L'étude théorique de la stabilité de sections prescrit le voilement simultané de toutes les plaques composant la section à cause des conditions de continuité imposées à leurs jonctions. Toutefois la vérification expérimentale montre qu'il y a généralement une plaque de la section transversale qui voile prématurément par rapport aux autres. Ce phénomène est dû aux

imperfections (géométriques locales et contraintes résiduelles) inhérentes au processus de fabrication de profilés à parois minces. Dès lors, il s'avère nécessaire de bien connaître l'interaction de voilement entre les parois, c'est à dire, comment le voilement d'une paroi va influencer le voilement des parois voisines et vice-versa.

Le coefficient de voilement  $k$  pour une plaque isolée appuyée aux deux bords non-chargés varie selon le degré de restrainte à la rotation fourni par les appuis latéraux. A la limite on a  $k = 4$ , condition de bi-appuyée, et  $k = 6,97$ , condition de bi-encastée, dans la direction transversale à la charge. Le même raisonnement s'applique aux plaques isolées avec un bord appuyé et l'autre libre dans la direction de la charge, dont le coefficient de voilement  $k$  varie de 0,425 à 1,277, pour le bord appuyé simplement appuyé et encasté, respectivement. Des recherches théoriques-expérimentales comme celles de DEWOLF, PEKOZ et WINTER [32], KALYANARAMAN [38] et MULLIGAN et PEKOZ [33,34] montrent l'écart entre les coefficients de voilement  $k$  de plaques de sections obtenus expérimentalement et de ceux obtenus en négligeant toute interaction entre les parois, c'est à dire, considérant les plaques comme isolées et avec les bords simplement appuyés,  $k = 4$  et  $k = 0,425$ , comme déjà décrit antérieurement. Ces constatations expérimentales montrent que l'interaction de voilement entre les parois est un fait qui ne doit pas être négligé dans les calculs théoriques de stabilité de profils à parois minces.

Quant aux méthodes de calcul de stabilité de section ou plaques composées, on peut en distinguer deux: la méthode analytique et la méthode numérique.

La détermination de contraintes de voilement de sections à parois minces par voie analytique a fait l'objet de diverses recherches au début des années 40, parmi lesquelles on peut citer l'article de CHILVER [39] qui a développé une méthode exacte en se basant sur l'équation (2.6) d'instabilité de plaques, où des conditions de continuité sont imposées à la liaison des plaques voisines composant la section. Plus récemment, RHODES et HARVEY [40] ont dérivé, sur base des travaux antérieurs, une formulation pour la détermination de la contrainte critique et du comportement post-critique de sections du type 'U', où ils ont abordé non seulement le cas de compression uniforme, mais aussi les effets de compression et de chargement excentriques. KALYANARAMAN [38], en se basant sur d'autres recherches antérieures, a mis au point une méthode analytique approchée pour la détermination du coefficient de voilement de plaques composées. Sa méthode est basée sur le degré de restrainte à la rotation que les plaques voisines exercent sur les bords de la plaque dont on veut déterminer le coefficient de voilement. Il a obtenu un bon accord entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus analytiquement.

A l'heure actuelle, les méthodes numériques sont sans doute les plus utilisées pour la détermination de contraintes critiques de sections à parois minces à cause de leur plus grande généralité. Dans ce domaine, on remarque deux catégories: la méthode des éléments finis et la méthode de bandes finies, illustrées à la figure 2.29. Dans le cadre du calcul de stabilité de sections à parois minces, où les caractéristiques géométriques et propriétés du matériau sont constantes le long d'une direction privilégiée, la méthode de

bandes finies est de loin la plus économique en temps de calcul et requiert moins d'espace de mémoire de l'ordinateur que la méthode des éléments finis. Afin de réduire le temps de calcul et la quantité de mémoire plus élevés requis par la méthode des éléments finis, JONSSON [41] a fait l'usage de la technique de sous-structuration, aussi illustrée à la figure 2.29.

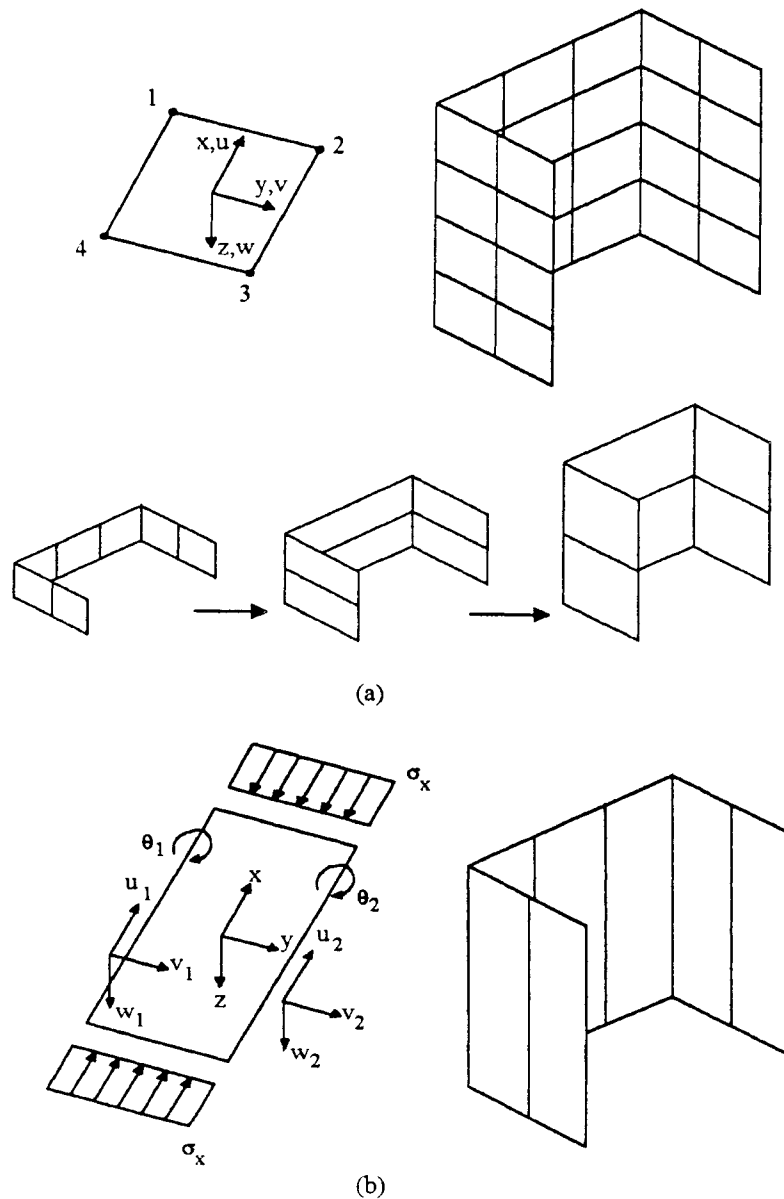


Figure 2.29- Méthodes numériques utilisées pour le calcul de stabilité de sections.  
 (a) Méthode des éléments finis et technique de sous-structuration;  
 (b) Méthode des bandes finies.

Quant à la méthode de bandes finies, elle a été originalement établie par CHEUNG [42] pour le calcul de dalles. Dans ce premier travail, seul les déformations hors du plan ont été prises en compte (déplacements  $w$  et  $\theta$  de la figure 2.29). Un peu après, il a étendu sa



méthode au calcul de structures formées par des plaques composées [43], où les déformations dans le plan (déplacements  $u$  et  $v$  de la figure 2.29) ont été inclus dans la formulation de la bande finie. D'autres applications et développements concernant la méthode de bandes finies ont été publiées par CHEUNG dans la référence [44].

L'application de la méthode des bandes finies au calcul de stabilité de sections est due à PRZEMIENIECKI [45]. Sur base des observations expérimentales d'essais de compression de tronçons courts, il part de l'hypothèse que les bords communs aux parois adjacentes restent droits au cours du voilement. Cette hypothèse simplifie la formulation, car il ne faut considérer que les déformations hors du plan (déplacements  $w$  et  $\theta$  de la figure 2.29). Aussi, ses développements sont limités au cas compression biaxiale centrée. Plus tard, PLANK et WITTRICK [46] ont étendu le travail de PRZEMIENIECKI pour inclure les effets de compression longitudinale excentrée, de compression transversale et de cisaillement. Aussi, l'hypothèse de déplacements des bords nuls a été relaxée, ce qui permet de trouver la charge critique de tronçons longs. Finalement GRAVES SMITH et SRIDHARAN [47] ont développé une formulation pour le calcul de stabilité de sections soumises à un chargement arbitraire.

L'instabilité de sections à parois minces se produit d'une façon tout à fait similaire à celle d'une plaque isolée. La forme du mode de flambement est sinusoïdale dans la direction longitudinale et la solution du problème de la stabilité de ces sections se présente sous la forme d'une courbe en festons du type de celle montrée à la figure 2.4. Par exemple, la figure 2.30, tirée de la référence [39], illustre bien ce fait. Cette figure montre la variation de la contrainte critique  $\sigma_{cr,s}$  de voilement d'une section du type 'U' avec sa longueur  $L$  et pour plusieurs valeurs de  $m$  de demi-ondes de voilement. On remarque que, plus grande est la longueur  $L$  du tronçon court, moins sensible il est, quant à sa contrainte critique de voilement, aux possibles variations de sa longueur; en effet, la courbe s'aplatit de plus en plus au fur et à mesure que le nombre de demi-ondes augmente. Il suffit dès lors de considérer une seule demi-onde de voilement,  $m=1$ , et ensuite de procéder à la recherche de la contrainte critique minimum dont la longueur  $L$  correspondante est appelée longueur critique,  $L_{cr}$ .

Dans ce qui suit, on présentera des résultats trouvés dans la littérature pour la solution du problème de stabilité de sections idéalisées du type cornière, 'U' et 'C' obtenus au moyen de la méthode de bande finie formulée comme proposé par PRZEMIENIECKI [45]. On entend par sections idéalisées, celles où les coins arrondis, sections réelles, sont remplacés par des coins anguleux.

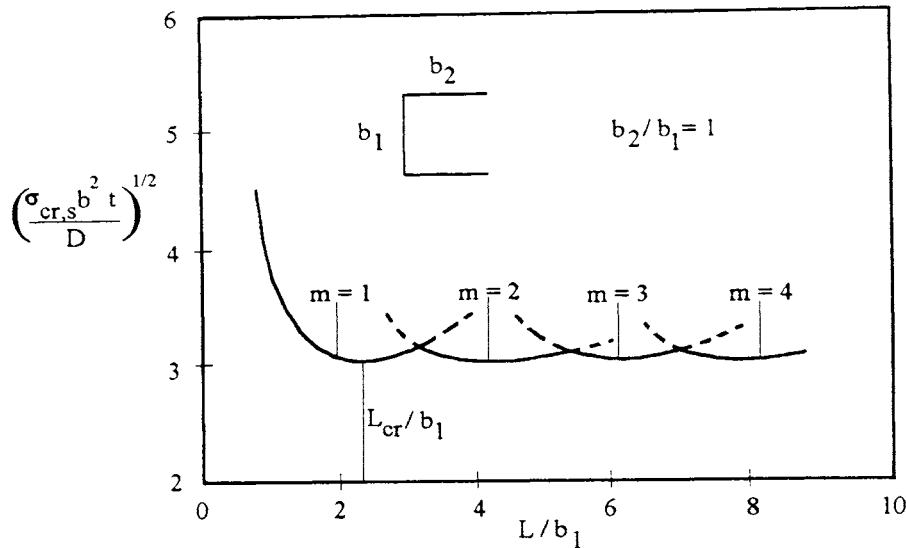


Figure 2.30- Contrainte critique de voilement d'une section du type 'U', tirée de la référence [39].

#### 2.4.2. La cornière

La cornière possède sans doute la section transversale la plus simple parmi les profils à parois minces. La figure 2.31 montre les dimensions d'une cornière idéalisée.

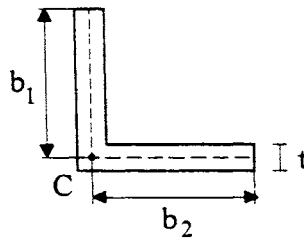


Figure 2.31- Cornière idéalisée.

Le mode de voilement d'une cornière est montré à la figure 2.32. L'effet de restrainte qu'une plaque exerce sur l'autre étant très faible, le voilement de ses plaques entraîne une rotation rigide de la section transversale autour de son centre de torsion C, figure 2.31. A cet égard, BLEICH [48] a été le premier à attirer l'attention sur la similitude entre le phénomène de flambement par torsion d'une cornière et du voilement de ses plaques. Cette similitude est d'autant plus vraie que les largeurs  $b_1$  et  $b_2$  des ailes se rapprochent. FERREIRA et RONDAL [49] ont établi analytiquement l'équivalence entre la charge critique de flambement par torsion et la charge critique de voilement d'une cornière à ailes égales.

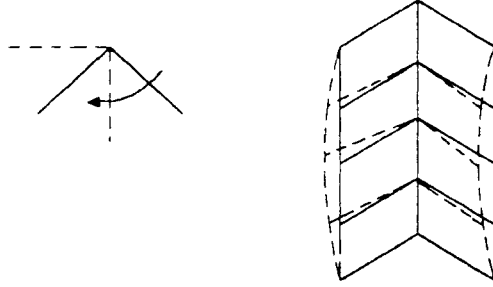


Figure 2.32- Similitude entre le voilement local et le flambement par torsion d'une cornière à ailes égales.

Dans ce cas, les deux ailes peuvent être considérées comme articulées à leur bord commun, ce qui donne un coefficient de voilement  $k$  égal à 0,425. Si  $b$  est la largeur commune des deux ailes, en utilisant l'équation (2.9) pour la contrainte critique de voilement de plaques, on trouve l'expression suivante pour la charge critique de voilement de la section,  $P_{cr,s}$ , d'une cornière à ailes égales:

$$P_{cr,s} = 2 \frac{0,425\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 bt \quad (2.71)$$

Quant à la charge critique de flambement par torsion, FERREIRA et RONDAL [49] ont déduit une formule en fonction uniquement des dimensions de la section transversale de la cornière, où la rigidité de gauchissement, qui est d'ailleurs très petite pour la cornière, a été négligée. La formule suivante, tirée de la référence [49], donne la charge critique de flambement par torsion d'une cornière idéalisée à ailes égales:

$$P_t = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{t}{b}\right)^2 bt \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2b}\right)^2} \quad (2.72)$$

En posant  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  et  $\nu = 0,3$  dans les formules (2.71) et (2.72), on obtient:

$$P_{cr,s} = 161330 \left(\frac{t}{b}\right)^2 bt \quad (2.73)$$

$$P_t = 161538 \left(\frac{t}{b}\right)^2 bt \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2b}\right)^2} \quad (2.74)$$

## II - Stabilité et ruine de plaques

respectivement. Ces deux expressions diffèrent par la présence, dans l'expression (2.74) de la charge critique de flambement par torsion, du terme:

$$\Delta = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{2b}\right)^2} \quad (2.75)$$

Ce dernier est très proche de l'unité pour des valeurs de minceur  $b/t$  trouvées en pratique, comme montré dans la référence [49]. On peut donc en conclure qu'il y a en pratique une équivalence quant aux charges critiques, entre les concepts de flambement par torsion et de voilement dans le cas de cornières à ailes égales.

Quant au calcul de stabilité de cornières à ailes inégales, il existe très peu de résultats dans la littérature; en effet, la restrainte exercée par la plaque plus étroite sur la plaque plus large reste faible. A ce sujet, BLEICH [48] donne quelques résultats: pour une cornière dont le rapport des largeurs  $b_1/b_2$  (voir figure 2.31) se situe entre 1 et 2, il obtient, en moyenne,  $k = 0,568$  pour la plaque de largeur  $b_1$  et quand le rapport  $b_1/b_2$  est entre 2 et 3, il obtient  $k = 0,504$  pour la plaque de largeur  $b_1$ . Comme on vient de le constater, les coefficients de voilement des plaques d'une cornière à ailes inégales ne s'écartent pas trop de 0,425, qui est le coefficient de voilement d'une plaque articulée et libre aux bords non-chargés.

### **2.4.3. La section de type 'U'**

Pour une section en 'U' à parois minces, les dimensions et le mode de voilement caractéristique sont illustrés à la figure 2.33.

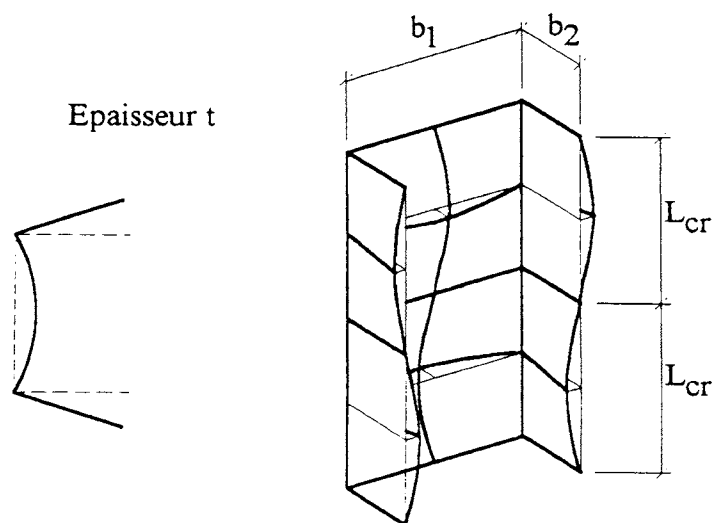


Figure 2.33- Dimensions et mode de voilement d'un profil avec section en 'U'.

On trouve sur la figure 2.34, tirée des références [33] ou [34], les résultats numériques du calcul de stabilité d'une section en 'U'. Grâce au voilement simultané des trois plaques, la courbe intitulée  $k_1$  est en relation avec la courbe intitulée  $k_2$  par l'expression suivante:

$$\frac{k_2}{k_1} = \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \quad (2.76)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont les coefficients de voilement des plaques de largeur  $b_1$  et  $b_2$ , respectivement. La troisième courbe sur cette figure donne la longueur critique,  $L_{cr}$ , de voilement de la section en 'U', tel que montrée à la figure 2.33, qui correspond à  $k_{min}$  pour le premier mode d'instabilité, une seule demi-onde longitudinale,  $m=1$ . On trouve aussi sur cette figure les résultats expérimentaux que MULLIGAN et PEKOZ ont obtenus lors des essais de compression de tronçons courts de section en U, [33,34].

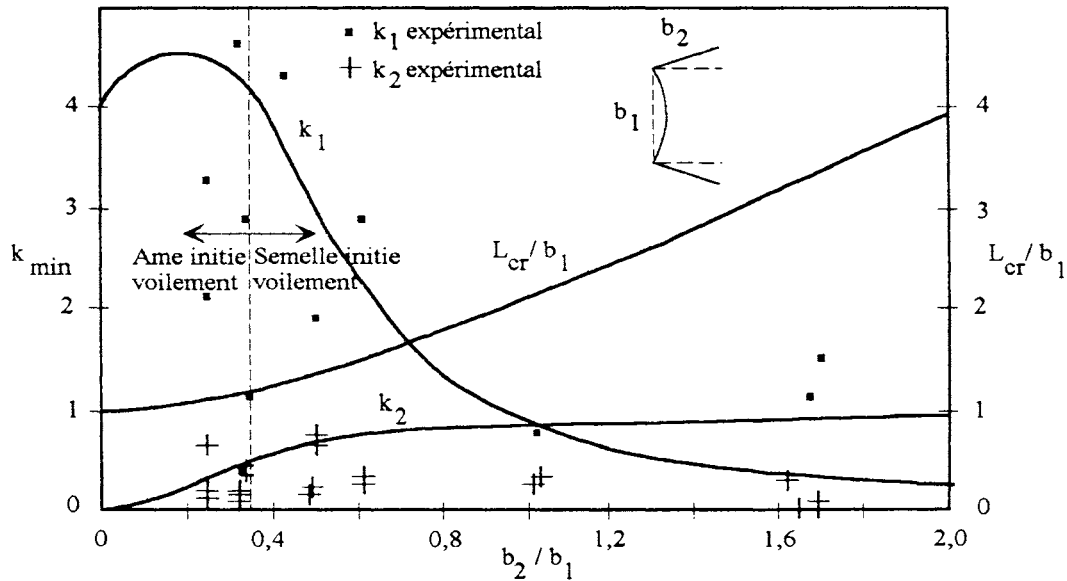


Figure 2.34- Résultats théoriques et expérimentaux de la section en U, tirée des références [33] ou [34] de MULLIGAN et PEKOZ.

On s'aperçoit que  $k_1$  part d'une valeur égale à 4, qui correspond au cas d'une plaque simplement appuyée,  $b_2 = 0$ , pour ensuite atteindre une contrainte critique maximale pour une section caractérisée par un rapport  $b_2/b_1$  proche de 0,2. Quant à  $k_2$ , il part d'une valeur nulle en atteignant la valeur de 0,425 pour un rapport  $b_2/b_1 = 0,315$ . Après, il continue à augmenter et on voit que quand le rapport  $b_2/b_1$  tend vers l'infini, la valeur de  $k_2$  tend vers 1,77, qui correspond au cas d'une plaque avec un bord encastré et l'autre libre. La justification du fait que  $k_2 > 0,425$  pour  $b_2/b_1 > 0,315$  est très simple si on fait appel à la figure 2.7 et l'effet de restrainte que la plaque 1 exerce sur la plaque 2; en effet, le voilement de la plaque 1, dû au voilement prématuré de la plaque 2, se produit dans une longueur de demi-onde (pour une plaque simplement appuyée  $L_{cr} = b_1$ ) qui est

certainement plus petite que celle de la plaque 2 avec un bord articulé et l'autre libre. En se reportant à la figure 2.7, on voit très nettement que, dans ce cas,  $k_2$  est plus grand que 0,425.

BATISTA [50], procédant à une analyse minutieuse des résultats numériques et modes d'instabilité obtenus à l'aide de la méthode de bandes finies, montre que pour les géométries où  $b_2/b_1$  reste inférieur à 0,345, la plaque de largeur  $b_1$  périclité la première par instabilité, en recevant l'aide de la plaque  $b_2$ . Pour des rapports  $b_2/b_1$  supérieurs à 0,345, le voilement de la section est au contraire tributaire de l'instabilité prématurée de la plaque de largeur  $b_2$ . On remarque que la valeur de demi-onde de voilement,  $L_{cr}$ , augmente à partir du rapport limite  $b_2/b_1$  égale à 0,345. Cette remarque s'explique par le fait que le voilement de la plaque de largeur  $b_2$ , avec un bord libre, demande une longueur de demi-onde de voilement plus grande que celle de la plaque de largeur  $b_1$ , appuyée aux deux bords. Pour le rapport  $b_2/b_1$  égal à 0,345 les plaques de largeur  $b_1$  et  $b_2$  voilent indépendamment l'une de l'autre pour la même contrainte critique. Néanmoins, les coefficients de voilement  $k_1$  et  $k_2$  sont légèrement supérieurs aux valeurs de la plaque simplement appuyée, 4 et 0,425, respectivement, car la section est forcée à voiler dans une longueur de demi-onde qui est différente de celle de chaque plaque isolée.

Pour une section en U, on peut tirer directement les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  du graphique de la figure 2.34. Afin de faciliter la programmation des calculs, BATISTA [50] a exprimé  $k_1$  à l'aide de formes polynomiales déterminées par la méthode des moindres carrés et représentant au mieux la courbe mentionnée ci-dessus :

$$k_1 = 4,02 + 3,44\eta + 21,76\eta^2 - 174,33\eta^3 + 319,94\eta^4 - 237,55\eta^5 + 63,60\eta^6$$
$$0 \leq \eta \leq 1,0 \quad (2.77)$$

avec :

$$\eta = \frac{b_2}{b_1} \quad (2.78)$$

La valeur de  $k_2$  peut toujours être déterminée à l'aide de l'équation (2.76).

Les résultats expérimentaux dus à MULLIGAN et PEKOZ sont aussi donnés à la figure 2.34 et les commentaires suivants sont tirés de leur article [34]. Une bonne corrélation théorique-expérimentale est obtenue pour le coefficient de voilement  $k_1$  de l'âme de la section en U; toutefois les valeurs théoriques du coefficient de voilement  $k_2$  de la semelle surestiment les résultats expérimentaux, qui tournent autour de 0,425. Les auteurs précités remarquent aussi que les résultats expérimentaux sont influencés par les facteurs suivant: choix de la longueur du tronçon court, location des jauges de contraintes relative aux demi-ondes de voilement et la planicité des sections d'extrémité. A leur avis, ce dernier facteur est surtout responsable des valeurs expérimentales faibles du coefficient  $k_2$  de la semelle.

#### 2.4.4. La section de type 'C'

Une section en C est obtenue à partir de la section en U en ajoutant à l'extrémité de la semelle une plaque supplémentaire de largeur  $b_3$ , figure 2.35a. Le but de cette troisième plaque est d'augmenter la raideur de la semelle. Cette augmentation de raideur de la plaque 2 est d'autant plus efficace que la raideur de la plaque 3, raidisseur, est suffisante pour tenir leur bord commun droit en cours de voilement de la section. Les figures 2.35b, 2.35c et 2.35d montrent les différents modes de voilement d'une section en C selon le rapport de la largeur de la plaque 3 à la largeur de la plaque 1,  $b_3/b_1$ .

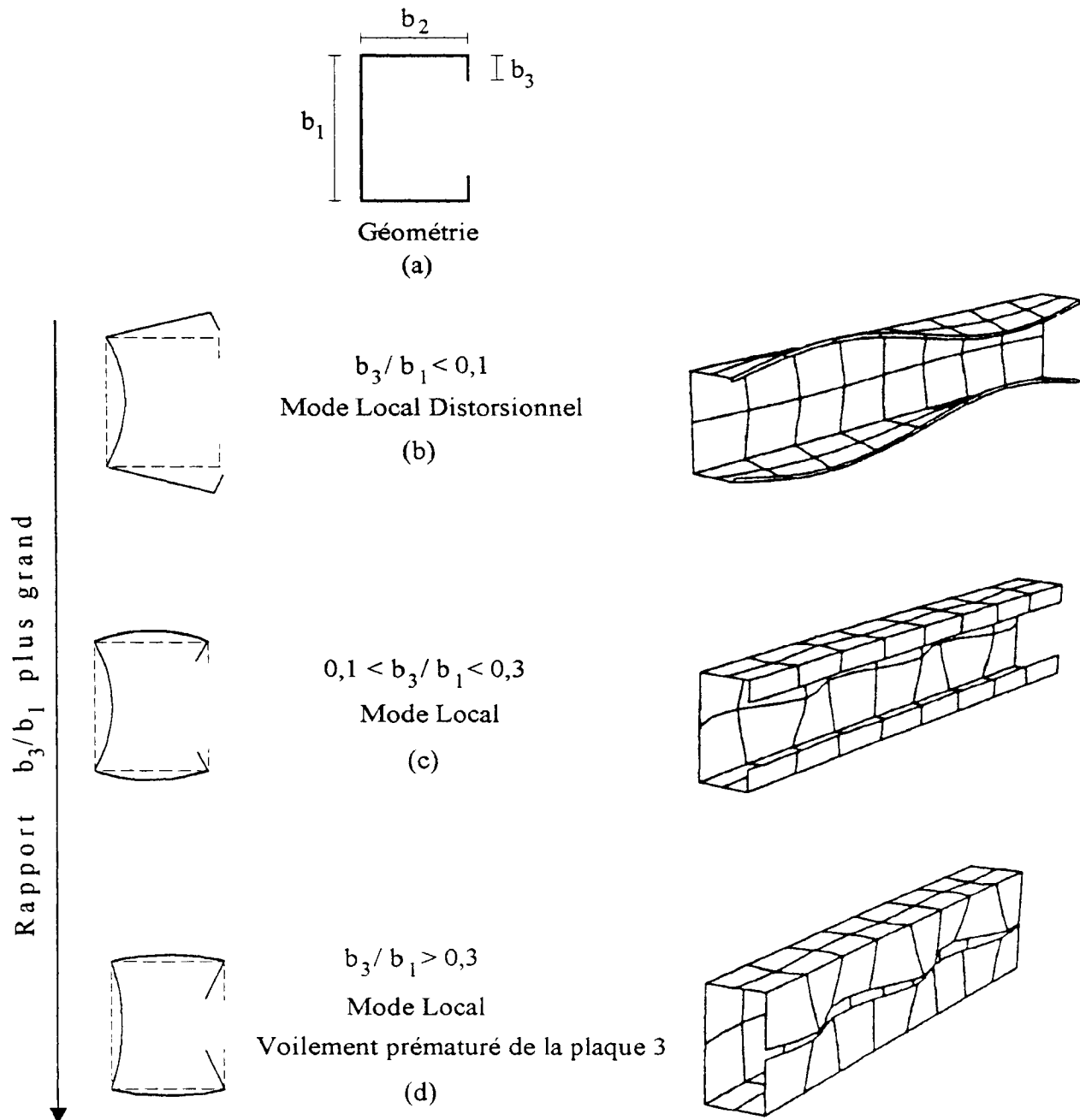


Figure 2.35- La géométrie et les modes locaux de voilement d'une section en C.

## II - Stabilité et ruine de plaques

On voit, intuitivement, que si la plaque 3 n'est pas suffisamment raide pour empêcher tout déplacement du bord commun aux plaques 2 et 3, l'ensemble de ces plaques tourne autour du bord commun aux plaques 1 et 2, ce qui caractérise le mode local distorsionnel montré à la figure 2.35b. Si, au contraire, la plaque 3 est suffisamment raide, le bord commun aux plaques 2 et 3 ne se déplace pas, caractérisant le mode local illustré à la figure 2.35c. Lorsque la largeur de la plaque 3 est trop grande, le voilement de la section est tributaire du voilement prématuré de la plaque 3, figure 2.35d.

Afin de pouvoir étudier le mode local distorsionnel au moyen de la méthode de bandes finies, il faut relaxer l'hypothèse de PRZEMIENIECKI, que les bords communs restent droits en cours de voilement et, par voie de conséquence, les déformations dans le plan doivent être incluses dans la formulation de la bande finie. MULLIGAN [33], DESMOND, PEKOZ et WINTER [51], HANCOCK [52,53], LUONGO et PIGNATARO [54] et SERRETE et PEKOZ [55] ont étudié ce problème en détail et les figures 2.36 et 2.37, tirées des références [33] et [54], respectivement, permettent à élucider cette question.

La figure 2.36 montre l'influence du rapport  $b_3/b_1$  sur le coefficient de la semelle,  $k_2$ , avec la longueur  $L$  de demi-onde de voilement. On note que les courbes possèdent deux minima locaux désignés par les points A et B, appelés minimum primaire et minimum secondaire, respectivement. Les modes de voilement correspondants aux minima sont le mode local, pour le point A, et le mode local distorsionnel, pour le point B. Si la longueur  $L$  de demi-onde de voilement est plus petite que la longueur correspondante au minimum primaire, point A, le mode de voilement est toujours local; si, par contre,  $L$  est plus grand que la longueur correspondante au minimum secondaire, point B, le mode de voilement est local distorsionnel pour autant que toute possibilité de flambement global soit exclus; et, finalement, si  $L$  se situe entre les longueurs correspondantes aux deux minima, le mode de voilement est un couplage des deux modes précités. Le mode d'instabilité qui gouverne le voilement de la section, étant toujours celui qui correspond au plus petit des deux minima, dans le cas de cette figure la section périt par le mode local de voilement. Pour les rapports géométriques utilisés, on note que le fait de doubler la largeur,  $b_3$ , du raidisseur ne change rien quant au minimum primaire.

Sur la figure 2.37 on montre l'influence du rapport  $b_2/b_1$  sur le rapport  $k_1^c/k_1^u$  avec la variation du rapport  $b_3/b_1$ , où  $k_1^c$  et  $k_1^u$  sont les coefficients de voilement de la plaque 1 de la section en C et de la section en U correspondante (sans le raidisseur de la semelle), respectivement. On observe que le rôle joué par le raidisseur est d'autant plus important que rapport  $b_2/b_1$  est plus grand. Afin de mieux comprendre les enseignements que cette figure apporte, les commentaires suivants sont extraits de la référence [51]. Pour des rapports  $b_3/b_1$  allant jusqu'à 0,1, approximativement, le raidisseur n'a pas une raideur en flexion suffisante pour appuyer l'extrémité de la semelle et le mode de voilement local distorsionnel est celui qui gouverne. Pour des rapports  $b_3/b_1$  allant de 0,1 à 0,3, approximativement, le raidisseur possède une raideur en flexion suffisante pour empêcher



tout déplacement latéral de l'extrémité de la semelle et le mode de voilement local est celui qui gouverne. Pour des rapports  $b_3/b_1$  plus grands que 0,3 l'instabilité de la section est tributaire du voilement prématuré du raidisseur.

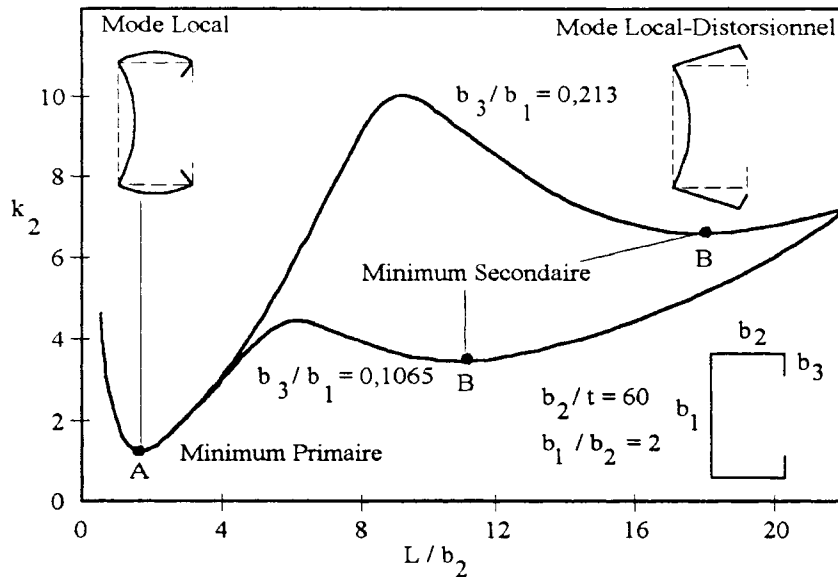


Figure 2.36- Influence du raidisseur sur le voilement de la semelle pour des sections en C uniformément comprimées, tirée de la référence [33].

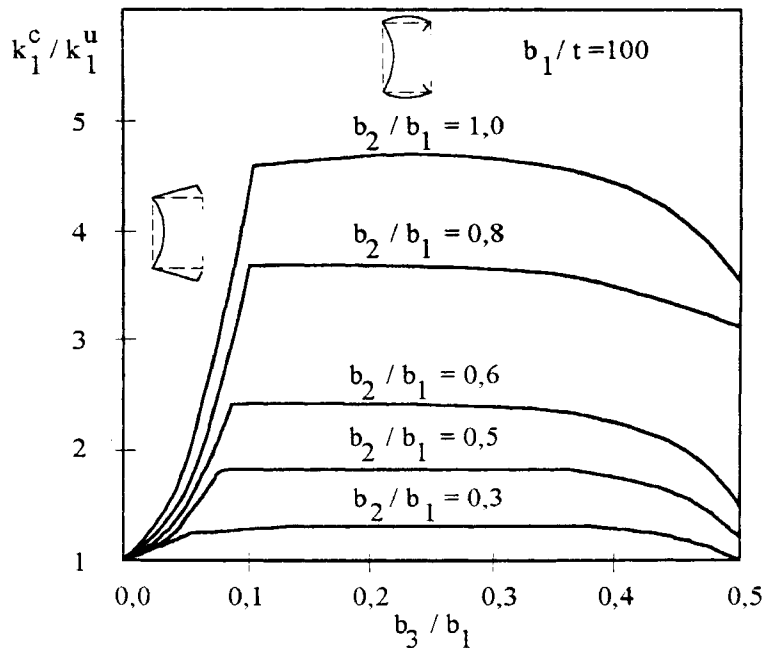


Figure 2.37- Influence du raidisseur sur le voilement de l'âme pour des sections en C uniformément comprimées, tirée de la référence [54].

Finalement, on présentera les résultats du calcul de stabilité de la section en C obtenus au moyen de la méthode de bandes finies, tel comme celle préconisée par PRZEMIENIECKI. Les résultats ici présentés sont valables pour autant que le rapport

$b_3/b_1$  soit entre 0,1 et 0,3 afin que les bords communs se tiennent droits en cours du voilement et que toute possibilité de voilement prématuré du raidisseur soit écartée. La figure 2.38, tirée de la référence [33], montre les résultats précités. L'expression (2.76) qui relie les deux courbes de voilement  $k_1$  et  $k_2$  reste toujours valable et, en plus, on trouve sur cette figure les résultats expérimentaux des coefficients de voilement obtenus en laboratoire.

On remarque que quand  $b_2/b_1$  tend vers zéro, les conditions d'appui de la plaque 1 se rapprochent de celles d'une plaque bi-encastree dans le sens transversal à la charge,  $k_1 = 6,97$ , et que quand, au contraire,  $b_2/b_1$  tend vers l'infini, les conditions d'appui de la plaque 2 se rapprochent de celles d'une plaque encastree-simplement appuyée,  $k_2 = 5,41$ . Pour un rapport  $b_2/b_1$  égal à 1, les plaques 1 et 2 voilent indépendamment l'une de l'autre avec  $k_1 = k_2 = 4$  et  $L_{cr}/b_1 = 1$ . Si  $b_2/b_1 < 1$  la plaque 1 périt la première par instabilité et pour  $b_2/b_1 > 1$ , le voilement de la section est au contraire tributaire de l'instabilité prématurée de la plaque 2. Ici aussi, BATISTA [50] a entrepris un ajustement numérique pour représenter  $k_1$  à l'aide de formes polynomiales au moyen de la méthode des moindres carrés, donné par l'expression suivante:

$$k_1 = 6,8 - 5,8\eta + 9,2\eta^2 - 6,0\eta^3 \quad \text{pour} \quad 0,1 \leq \frac{b_2}{b_1} \leq 1,0 \quad \text{et} \quad 0,1 \leq \frac{b_3}{b_1} \leq 0,3 \quad (2.79)$$

où l'expression de  $\eta$  est celle donnée en (2.78).

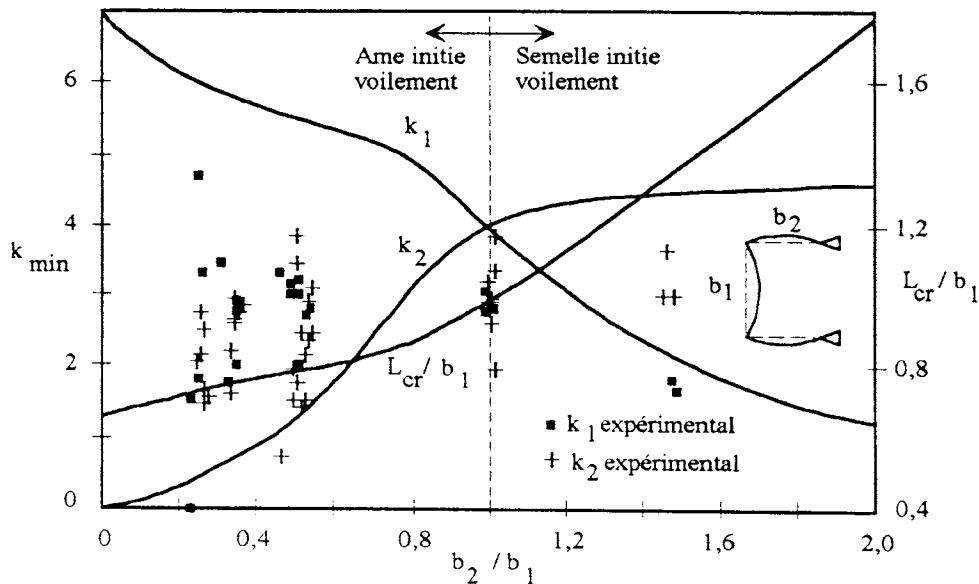


Figure 2.38- Résultats théoriques et expérimentaux de la section en C, tirée de la référence [33] de MULLIGAN.

Quant aux résultats expérimentaux dus à MULLIGAN présentés sur cette figure, on constate qu'il y a une corrélation théorique-expérimentale raisonnable pour les valeurs de  $k_2$ . Ceci est dû au fait que les largeurs  $b_3$  des raidisseurs des sections en C de

MULLIGAN sont dimensionnées de manière à satisfaire les conditions de DESMOND [51], qui établissent l'inertie minimum nécessaire des raidisseurs en fonction de la minceur  $b_2/t$  de la semelle à raidir. Par contre, quant aux valeurs de  $k_1$ , on constate une mauvaise corrélation théorique-expérimentale, surtout pour des sections où l'âme est très élancée par rapport au flange ( $b_2/b_1 < 0,5$ ); en effet, l'auteur a pu vérifier que la moyenne des rapports  $b_3/b_1$  des sections testées est de 0,11 et que 56% des sections avait  $b_3/b_1 < 0,1$ , or la distorsion de l'ensemble semelle-raisseur favorise encore plus le voilement de l'âme (voir figure 2.35b), qui d'ailleurs, est déjà la plaque qui périt la première par instabilité. En conclusion, le concept de dimensionnement du raidisseur dû à DESMOND, concernant seulement la semelle à raidir, sans aucun égard par rapport à l'âme, ne fait pas bénéficier du maximum de performance qu'une section en C peut avoir, ce qui met bien en évidence l'importance des résultats dus à LUONGO et PIGNATARO qui établissent le dimensionnement du raidisseur avec égard à l'âme ( $0,1 < b_3/b_1 < 0,3$ ).

## **2.5. LES NORMES ET DES ADAPTATIONS POUR LE CALCUL DE LARGEURS EFFECTIVES UTILISEES DANS LE PROGRAMME D'ELEMENT FINI**

### **2.5.1. Introduction**

Dans le cadre de cette thèse on a choisi pour le calcul des largeurs effectives dans le programme d'élément fini ce qu'il y avait de plus récent sur cette matière des côtés Européen et Américain. On a fait ce choix parce que leurs codes englobent l'expérience accumulée au cours de plusieurs recherches sur le continent Européen et aux Etats-Unis, respectivement. Du côté Européen on a suivi l'annexe A de l'Eurocode 3 [56] et du côté Américain, le draft de l'AISI-90 [57] (American Iron and Steel Institute); tous les deux donnent des procédures pour le calcul de stabilité de structures formées par des profils à parois minces.

Malgré l'actualité de la l'AISI-90, elle n'est pas exempte de quelques obstacles pour l'utiliser dans un élément fini. Par exemple, il y a des formules pour le calcul de largeurs effectives qui présentent des discontinuités et des procédures pour le traitement du raidisseur, plaque 3, de la section en C qui manquent de généralité afin de couvrir tous les cas dont on a besoin pour la programmation.

Dans ce qui suit on présente les propositions des deux normes précitées pour le calcul de largeurs effectives où les problèmes qu'on vient de citer sont mis en évidence et des adaptations sont envisagées afin de leur rendre utilisable dans l'élément fini.

### **2.5.2. Plaque dont les bords sont simplement appuyés**

Pour le calcul de largeurs effectives de plaques bi-appuyées dans le sens transversal à la charge, il y a une petite différence quant à la largeur plane de la plaque  $b_p$  à considérer

dans les calculs entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90. Cette différence concerne les arrondis des profils et la figure 2.39 illustre ce fait.

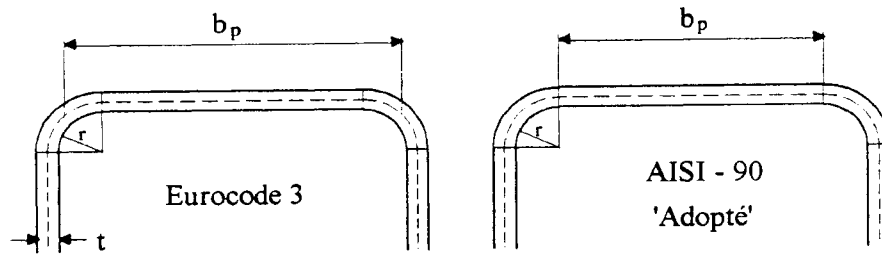


Figure 2.39- Largeur plane  $b_p$  à considérer.

Afin d'uniformiser et de simplifier la programmation, on a choisi de calculer  $b_p$  comme proposé par l'AISI-90. En ce qui concerne l'Eurocode 3, le fait de prendre pour  $b_p$  la largeur purement plane entre les deux arrondis ne doit pas donner des résultats très différents de ceux avec la largeur calculée comme réglementée dans celui-ci; en effet, l'Eurocode 3 préconise que si  $r \leq 5t$  et  $r/b_p \leq 0,15$ , ce qui est normalement le cas de profils à parois minces, le calcul des caractéristiques géométriques de la section transversale peut être fait en remplaçant les arrondis par des coins anguleux.

Quant au calcul de la largeur effective, les deux normes négligent l'effet d'interaction de voilement entre les plaques des sections, qui sont considérées comme des plaques isolées, bords simplement appuyés. Heureusement, l'effet d'un gradient de contraintes de la charge agissant sur la plaque est pris en compte. La figure 2.40 montre la notation utilisée dans le tableau 2.3 pour le calcul de la largeur effective.

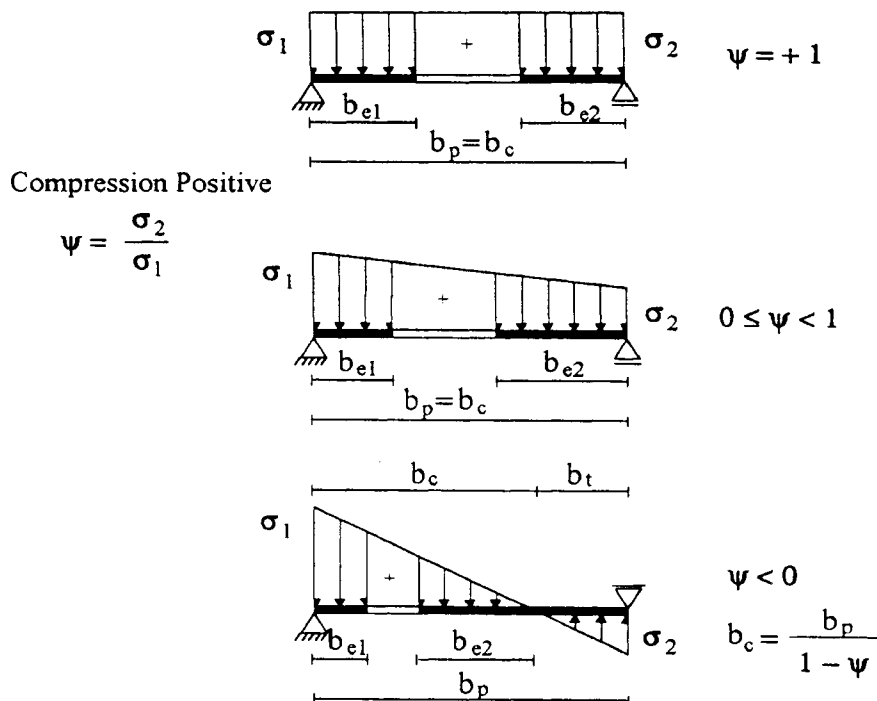


Figure 2.40- Notation et représentation graphique de la répartition de la largeur effective.

**EUROCODE 3**

**AISI-90**

**Coefficient de Voilement**

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \psi \leq 1 \rightarrow k = \frac{8,2}{1,05 + \psi} \\ -1 < \psi \leq 0 \rightarrow k = 7,81 - 6,29 \psi + 9,78 \psi^2 \\ \psi \leq -1 \rightarrow k = 5,98 (1 - \psi)^2 \end{array} \right. \quad \forall \psi \rightarrow k = 4 + 2(1 - \psi)^3 + 2(1 - \psi)$$

**Calcul de la Largeur Effective**

$$\bar{\lambda}_p = 1,052 \frac{b_p}{t} \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{\sigma_1}{E}}$$

$$\bar{\lambda}_{py} = 1,052 \frac{b_p}{t} \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$$

$$\bar{\lambda}_e = 0,256 + 0,328 \frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_p \leq 0,673 \rightarrow \rho = 1 \\ \bar{\lambda}_p > 0,673 \rightarrow \rho = \left( 1 - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_p} + 0,18 \frac{\bar{\lambda}_{py} - \bar{\lambda}_p}{\bar{\lambda}_{py} - 0,6} \leq 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'un des bords appuyé sur un raidisseur} \\ \bar{\lambda}_p \leq 0,673 \rightarrow \rho = 1 \\ \bar{\lambda}_p > 0,673 \rightarrow \rho = \left( 1 - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les deux bords appuyés sur des âmes} \\ \bar{\lambda}_p \leq 0,673 \rightarrow \rho = 1 \\ 0,673 < \bar{\lambda}_p < \bar{\lambda}_e \rightarrow \rho = \left( 1,358 - \frac{0,461}{\bar{\lambda}_p} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \\ \bar{\lambda}_p \geq \bar{\lambda}_e \rightarrow \rho = \left( 0,41 + 0,59 \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_1}} - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \end{array} \right.$$

$$b_e = \rho \ b_c$$

$$\rho \leq 1$$

$$b_e = \rho \ b_p, \ b_e \leq b_c$$

**Répartition de la Largeur Effective**

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \psi \leq 1 \rightarrow b_{e1} = \frac{2b_e}{5 - \psi}, b_{e2} = b_e - b_{e1} \\ \psi \leq 0 \rightarrow b_{e1} = 0,4b_e, b_{e2} = 0,6b_e \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{e1} = b_e / (3 - \psi) \\ \psi \leq -0,236 \rightarrow b_{e2} = b_e / 2 \\ \psi > -0,236 \rightarrow b_{e2} = b_e - b_{e1} \end{array} \right.$$

$$b_{e1} + b_{e2} \leq b_c$$

Tableau 2.3- Calcul et répartition de largeurs effectives pour la plaque appuyée aux deux bords.

## II - Stabilité et ruine de plaques

Comme montré au tableau 2.3, la prise en compte du gradient de contraintes est faite en faisant dépendre le coefficient de voilement  $k$ , du rapport  $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$ , voir paragraphe 2.1.2. La figure 2.41 montre une comparaison de  $k$  selon les deux normes. En réalité ces courbes sont un ajustement de la valeur théorique de  $k$ , voir figure 2.6, où le traitement plus minutieux par l'Eurocode 3 permet d'obtenir des valeurs de  $k$  plus exactes pour  $\psi < -1$ .

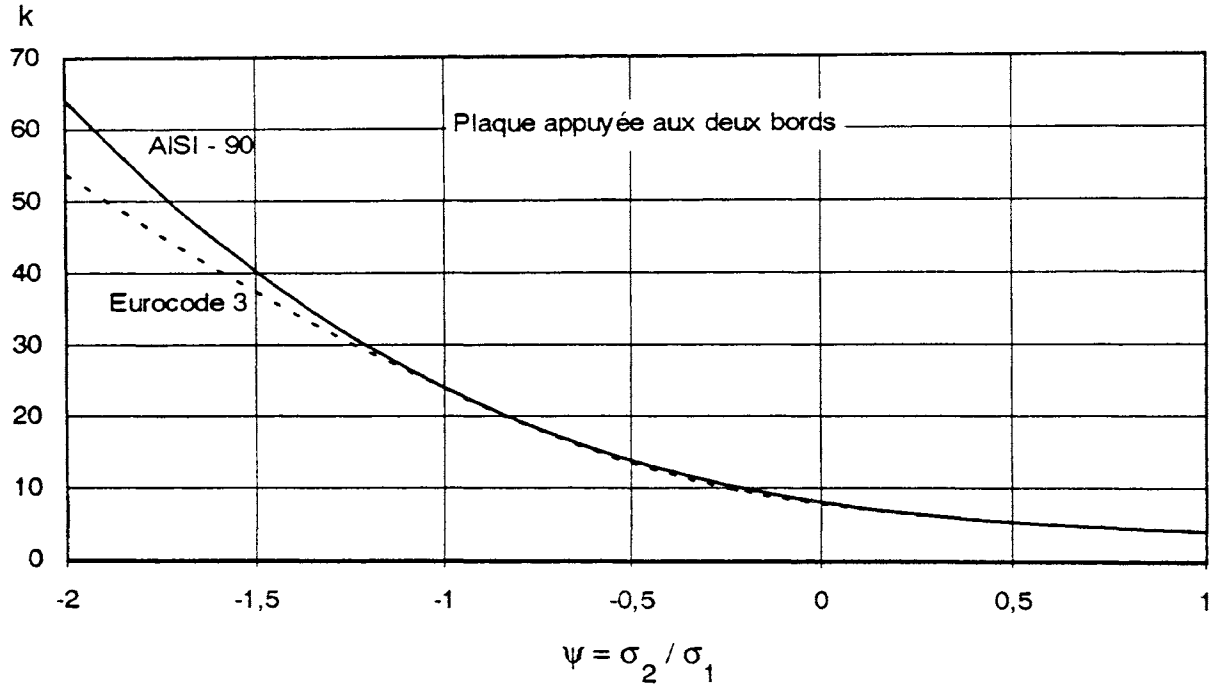


Figure 2.41- Comparaison des coefficients de voilement  $k$  de plaques appuyées aux deux bords entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90.

Avant de poursuivre la comparaison des courbes de calcul de largeur effective  $\rho(\bar{\lambda}_p)$  entre les deux normes, il s'avère nécessaire de mettre en évidence quelques détails relatifs à la formule de l'AISI-90 pour des plaques avec les deux bords appuyés sur des âmes. Par exemple, la valeur de  $\bar{\lambda}_p$  varie normalement de zéro à  $\bar{\lambda}_{py}$ , en cours de chargement, ( $\sigma_1$  va de zéro à  $f_y$ ) passant par la frontière  $\bar{\lambda}_e$  (voir tableau 2.3) des deux formules de largeur effective. En égalant l'expression de  $\bar{\lambda}_p$  à celle de  $\bar{\lambda}_e$ , on trouve que  $\sigma_1$  doit satisfaire l'expression suivante:

$$\sqrt{\frac{\sigma_1}{f_y}} = \frac{0,243\sqrt{k}}{\frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}} + 0,312\sqrt{k} \quad \text{pour } \bar{\lambda}_p = \bar{\lambda}_e \quad (2.80)$$

Ensuite, en égalant maintenant les deux formules de calcul de largeur effective pour  $0,673 < \bar{\lambda}_p < \bar{\lambda}_e$  et  $\bar{\lambda}_p \geq \bar{\lambda}_e$  en  $\bar{\lambda}_p = \bar{\lambda}_e$ , on trouve que  $\sigma_1$  doit satisfaire l'équation suivante:

$$\sqrt{\frac{\sigma_1}{f_y}} = \frac{0,486}{\frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}} + 0,624 \quad (2.81)$$

On voit que  $\sigma_1$  ne peut satisfaire les expressions (2.80) et (2.81) simultanément que si  $k = 4$ . Donc, on doit s'attendre à une discontinuité entre les deux formules de calcul de largeur effective en  $\bar{\lambda}_p = \bar{\lambda}_e$  quand la valeur de  $k$  est différente de 4.

On peut encore entreprendre un calcul pour connaître la valeur de  $k$  pour laquelle  $\bar{\lambda}_{py} = \bar{\lambda}_e$ , ce qui donne:

$$\sqrt{k_{lim}} = \frac{1}{\frac{0,243}{\frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}} + 0,312} \quad (2.82)$$

qui est tel que:

$$4,0 < k < k_{lim} \rightarrow \bar{\lambda}_{py} > \bar{\lambda}_e \quad (2.83)$$

$$k \geq k_{lim} \rightarrow \bar{\lambda}_{py} \leq \bar{\lambda}_e \quad (2.84)$$

Les figures 2.42, 2.43 et 2.44 montrent une comparaison graphique entre les deux normes pour trois valeurs différentes de  $k$ . Ces valeurs sont 4, 5 et 6,998, respectivement. La dernière valeur correspond à  $k_{lim}$  de l'équation (2.82) pour  $b_p/t = 90$  et  $f_y = 355$  MPa. La figure 2.42 montre que la courbe de l'AISI-90 présente un point anguleux en  $\bar{\lambda}_p = \bar{\lambda}_e$ . La figure 2.43 illustre la discontinuité de la courbe de l'AISI-90 pour une valeur de  $k$  différente de 4,  $k = 5$ . La figure 2.44 montre l'inadéquation de la courbe de l'AISI-90 lorsque  $\bar{\lambda}_{py} = \bar{\lambda}_e$ .

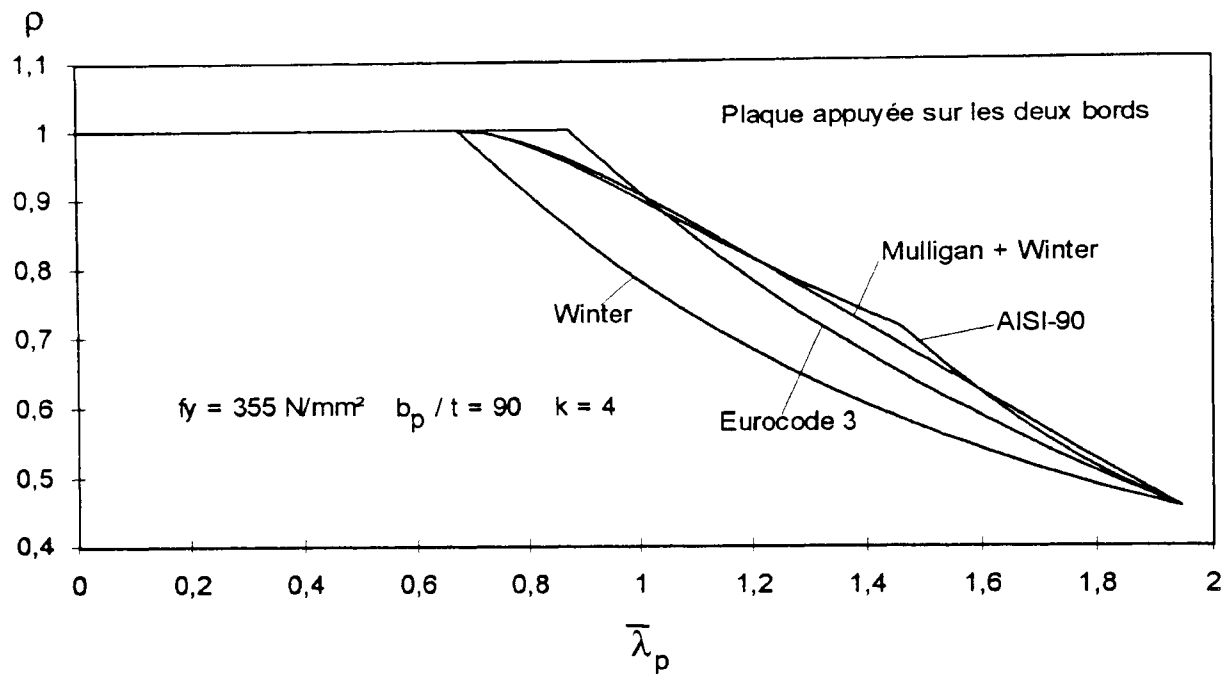


Figure 2.42- Comparaison graphique des formules de calcul de largeur effective pour la plaque appuyée aux deux bords,  $k = 4$ .

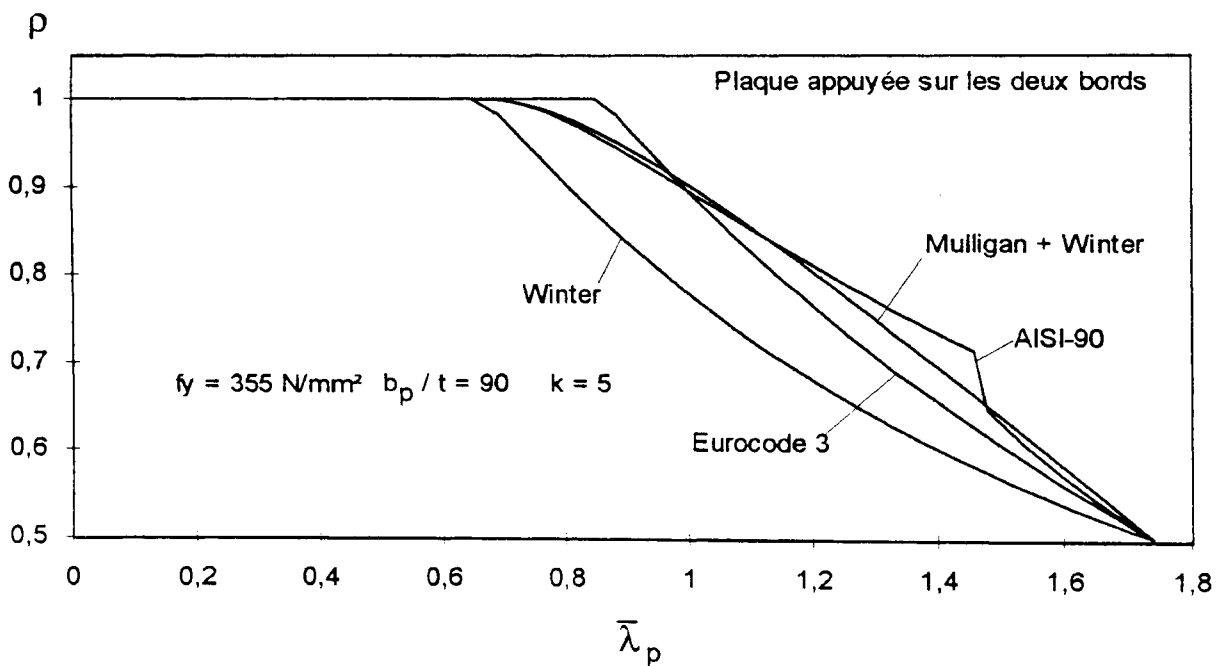


Figure 2.43- Comparaison graphique des formules de calcul de largeur effective pour la plaque appuyée aux deux bords,  $k = 5$ .



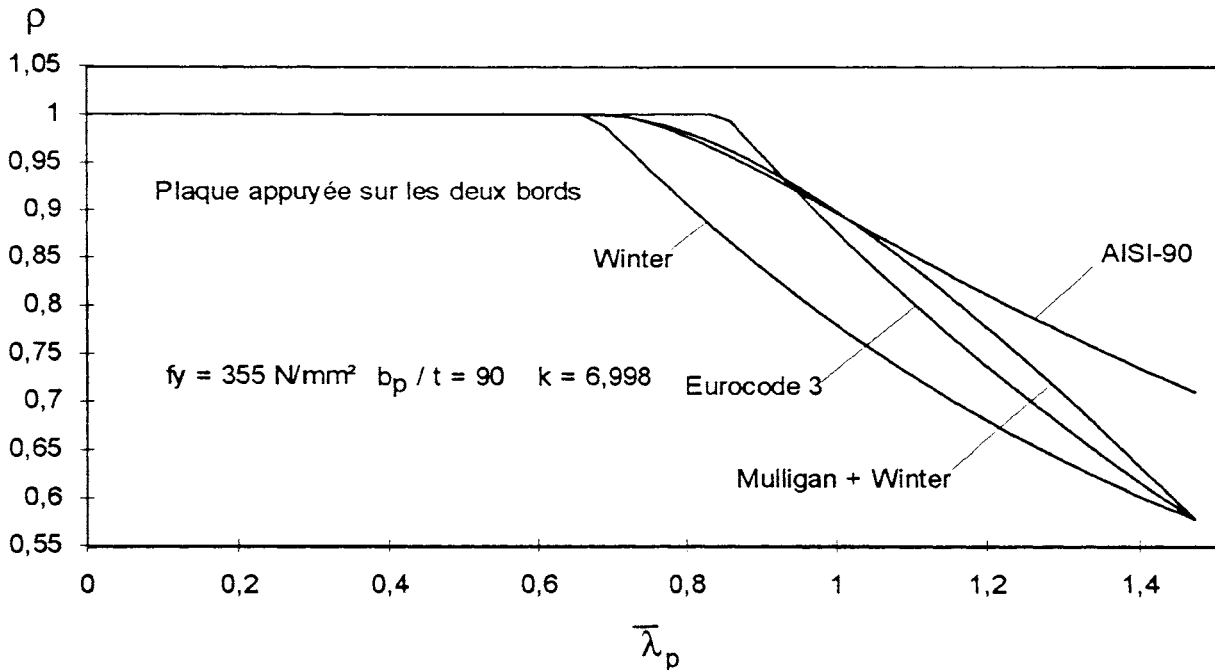


Figure 2.44- Comparaison graphique des formules de calcul de largeur effective pour la plaque appuyée aux deux bords,  $k = 6,998$ .

Sur ces figures on trouve aussi les courbes de Winter, équation (2.40), et la combinaison Mulligan+Winter, équation (2.63). Si on compare la courbe de l'Eurocode 3 avec celle de Mulligan+Winter et celle de l'AISI-90, on note que le palier pré-voilé de l'Eurocode 3 est sensiblement plus large que  $\bar{\lambda}_{p0} = 0,673$ . Ceci est dû au fait que la formule de  $\rho$  de l'Eurocode 3 donne des valeurs plus grandes que 1 pour des valeurs de  $\bar{\lambda}_p$  un peu plus grandes que 0,673, combiné avec la condition  $\rho \leq 1$ . En plus, la courbe de l'Eurocode 3 est conservative par rapport à celles de l'AISI-90 et Mulligan+Winter dans une plus grande partie du chemin d'équilibre suivi jusqu'à  $\bar{\lambda}_{py}$ .

Quant au calcul de la largeur effective  $b_e$ , on peut voir au tableau 2.3 que pour l'Eurocode 3 elle est calculée par rapport à  $b_c$  ( $b_e = \rho b_c$ ), alors que pour l'AISI-90 elle est calculée par rapport à  $b_p$  ( $b_e = \rho b_p$ ). En réalité les deux approches ne diffèrent que si  $\psi < 0$ , ( $b_c \neq b_p$ ). Le calcul de  $b_e$  par rapport à  $b_c$  semble plus logique et pour pouvoir comparer la répartition de la largeur effective  $b_e$  en  $b_{e1}$  et  $b_{e2}$  en fonction de  $\psi = \sigma_2 / \sigma_1$  pour les deux normes il faut ramener les formules de  $b_{e1}$  et  $b_{e2}$  de l'AISI-90 à  $b_c$  en utilisant la formule  $b_c = b_p / (1 - \psi)$  montrée à la figure 2.40 pour  $\psi < 0$ . Tous calculs faits, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{AISI-90} \\ b_e = \rho b_c \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \psi < 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{e1} = \frac{b_e}{3-\psi} \\ b_{e2} = b_e \frac{2-\psi}{3-\psi} \end{array} \right. \\ -0,236 < \psi < 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{e1} = b_e \frac{1-\psi}{3-\psi} \\ b_{e2} = b_e (1-\psi) \frac{2-\psi}{3-\psi} \end{array} \right. \\ \psi \leq -0,236 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{e1} = b_e \frac{1-\psi}{3-\psi} \\ b_{e2} = b_e \frac{1-\psi}{2} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.85)$$

La comparaison graphique entre les deux normes pour les répartitions de la largeur effective par rapport à  $b_e$ ,  $b_{e1}/b_e$  et  $b_{e2}/b_e$ , avec  $b_e = \rho b_c$  est donnée à la figure 2.45. De nouveau, on constate qu'il y a une discontinuité de la courbe  $b_{e2}/b_e$  de l'AISI-90 sur l'abscisse  $\psi = -0,236$ . Afin de contourner ce problème, on propose d'ajuster un polynôme cubique en liant les points d'abscisse  $\psi = -0.5$  et  $\psi = 0$  de manière à respecter les valeurs de  $b_{e2}/b_e$  et de sa dérivée par rapport à  $\psi$  des courbes de l'AISI-90 proches des points d'abscisse déjà cités, tel que donné par la courbe pointillée de la figure 2.45. Tous calculs faits, on a l'expression suivante pour le polynôme cubique précité:

$$\frac{b_{e2}}{b_e} = A_{r1}\psi^3 + A_{r2}\psi^2 + A_{r3}\psi + A_{r4} \quad \text{pour} \quad -0,5 < \psi < 0 \quad (2.86)$$

avec:

$$A_{r1} = -\frac{10}{9} \quad A_{r2} = -\frac{4}{9} \quad A_{r3} = -\frac{1}{9} \quad A_{r4} = \frac{2}{3} \quad (2.87)$$

Sur cette figure on peut aussi remarquer que les rapports  $b_{e1}/b_e$  et  $b_{e2}/b_e$  de l'AISI-90 sont d'autant plus grands par rapport à ceux de l'Eurocode 3 que la valeur de  $\psi$  est plus négative pour  $\psi < 0$ . La justification de ce fait est que  $b_e$  est calculé par rapport à  $b_p$  avec l'AISI-90; alors qu'avec l'Eurocode 3, son calcul est par rapport à  $b_c$ . Or, plus  $\psi$  est négatif, plus petite est la longueur comprimée  $b_c$ .

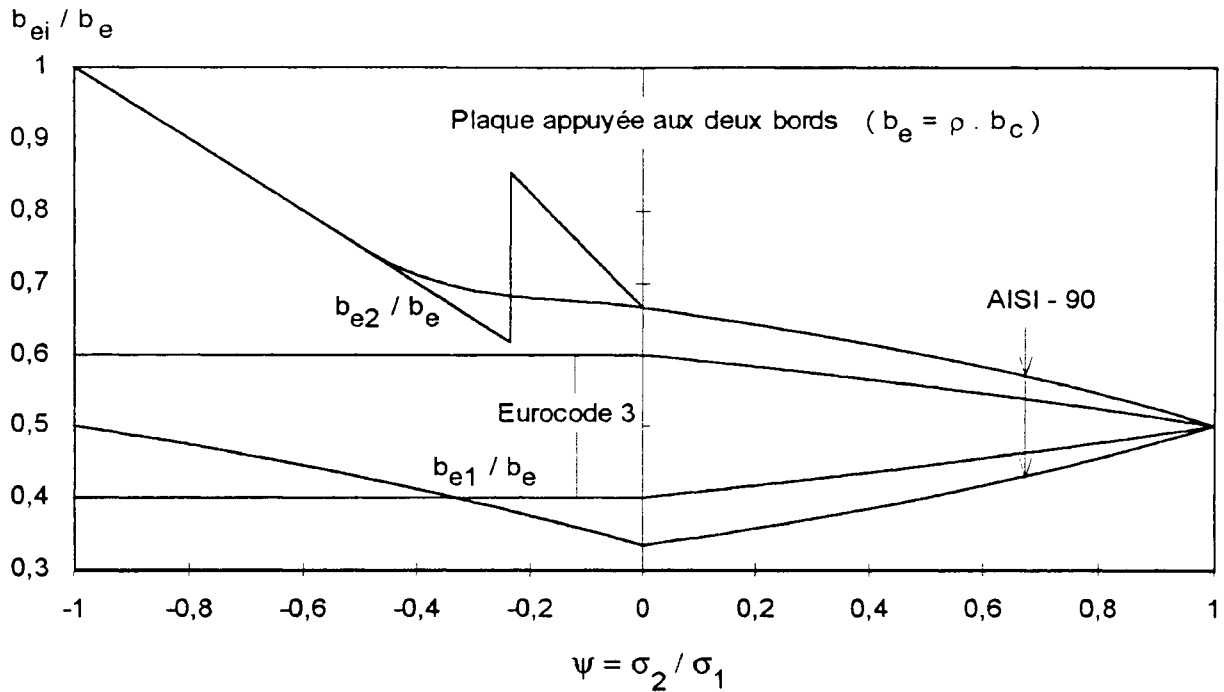


Figure 2.45- Répartition de la largeur effective pour l'Eurocode 3 et l'AISI-90.

L'utilisation de l'AISI-90 pour le calcul de la largeur effective dans l'élément fini pose des difficultés insurmontables pour la convergence de la solution non-linéaire à cause des discontinuités que présente la courbe de  $\rho$  pour la plaque appuyée sur des âmes aux deux bords latéraux et la courbe de répartition pour  $b_{e2}$ , comme on vient de le voir. Afin de remédier à ce problème, on propose, dans le cadre de cette thèse, d'utiliser l'AISI-90 modifié qui consiste à substituer la combinaison de Mulligan+Winter et la parabole (voir figure 2.3) à celle préconisée par l'AISI-90 pour le calcul de la largeur effective de plaques appuyées sur des âmes aux deux bords latéraux et, quant à la répartition de la largeur effective, on utilise l'équation (2.86) pour calculer  $b_{e2}$  pour  $-0,5 < \psi < 0$  (voir figure 2.45). **Par soucis de simplification du langage dans cette thèse, toute référence à la norme Américaine sera appelée AISI-90, avec les modifications citées ci-dessus.**

### 2.5.3. Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre

Le tableau 2.4 montre une comparaison numérique de formules de calcul de largeur effective pour la plaque avec un bord libre entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90. On constate tout de suite que l'AISI-90 ne fait aucune distinction, quant au gradient de contraintes, pour le calcul du coefficient de voilement  $k$  qui est toujours égal à 0,43. La figure 2.46 montre graphiquement une comparaison du calcul de  $k$  en fonction de  $\psi$  pour les deux normes.

Quant au calcul de la largeur effective, on remarque que l'AISI-90 utilise la formule de WINTER, alors que la formule préconisée par l'Eurocode 3 est, à notre avis, plus réaliste

## II - Stabilité et ruine de plaques

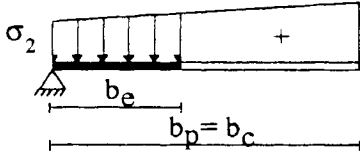
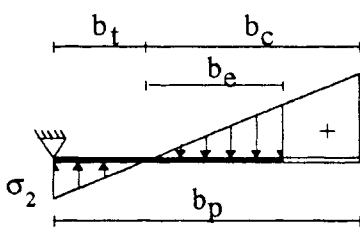
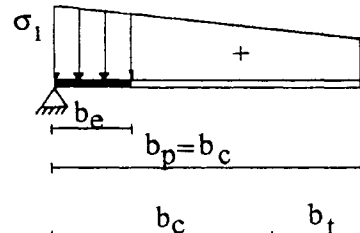
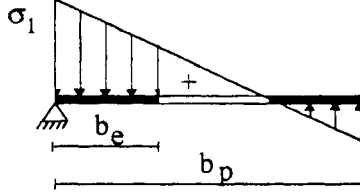
eu égard au comportement sous-ultime de plaques déjà discuté au paragraphe 2.3 de cette thèse. Sur la figure 2.47 on trouve une comparaison graphique des deux normes pour différentes formes du gradient de contraintes. Cette fois, on peut vérifier qu'on a le rapport  $\sigma_1/f_y$  pour l'axe des abscisses au lieu de  $\bar{\lambda}_p$ . Ceci est dû au fait que des courbes avec une valeur de  $k$  différente l'une de l'autre auraient aussi différentes valeurs de  $\bar{\lambda}_{py}$ .

Finalement, à titre comparatif, la figure 2.48 illustre graphiquement les approches de calcul de largeur effective pour la plaque appuyée sur un seul bord pour l'AISI-90, l'Eurocode 3, Kalyanaraman et la combinaison Mulligan+Kalyanaraman.

**EUROCODE 3**

**AISI-90**

Coefficient de Voilement - Compression Positive  $\psi = \sigma_2/\sigma_1$

$\begin{cases} 0 < \psi \leq 1 \\ k = 0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2 \end{cases}$		$k = 0,43$
$\begin{cases} -1 \leq \psi \leq 0 \\ k = 0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2 \end{cases}$		$k = 0,43$
$\begin{cases} 0 \leq \psi \leq 1 \\ k = \frac{0,578}{\psi + 0,34} \end{cases}$		$k = 0,43$
$\begin{cases} -1 \leq \psi < 0 \\ k = 1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2 \end{cases}$		$k = 0,43$

**Calcul de la Largeur Effective**

$$\bar{\lambda}_{py} = 1,052 \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$$

$$\bar{\lambda}_p = 1,052 \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{b_p}{t} \sqrt{\frac{\sigma_1}{E}}$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_p \leq 0,673 \rightarrow \rho = 1 \\ \bar{\lambda}_p > 0,673 \rightarrow \rho = \left(1 - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p}\right) \frac{1}{\bar{\lambda}_p} + 0,18 \frac{\bar{\lambda}_{py} - \bar{\lambda}_p}{\bar{\lambda}_{py} - 0,6} \end{cases}$$

$$b_e = \rho b_c$$

$$\rho \leq 1$$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_p \leq 0,673 \rightarrow \rho = 1 \\ \bar{\lambda}_p > 0,673 \rightarrow \rho = \left(1 - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p}\right) \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \end{cases}$$

$$b_e = \rho b_c$$

Tableau 2.4- Calcul de largeurs effectives pour la plaque appuyée sur un seul bord.

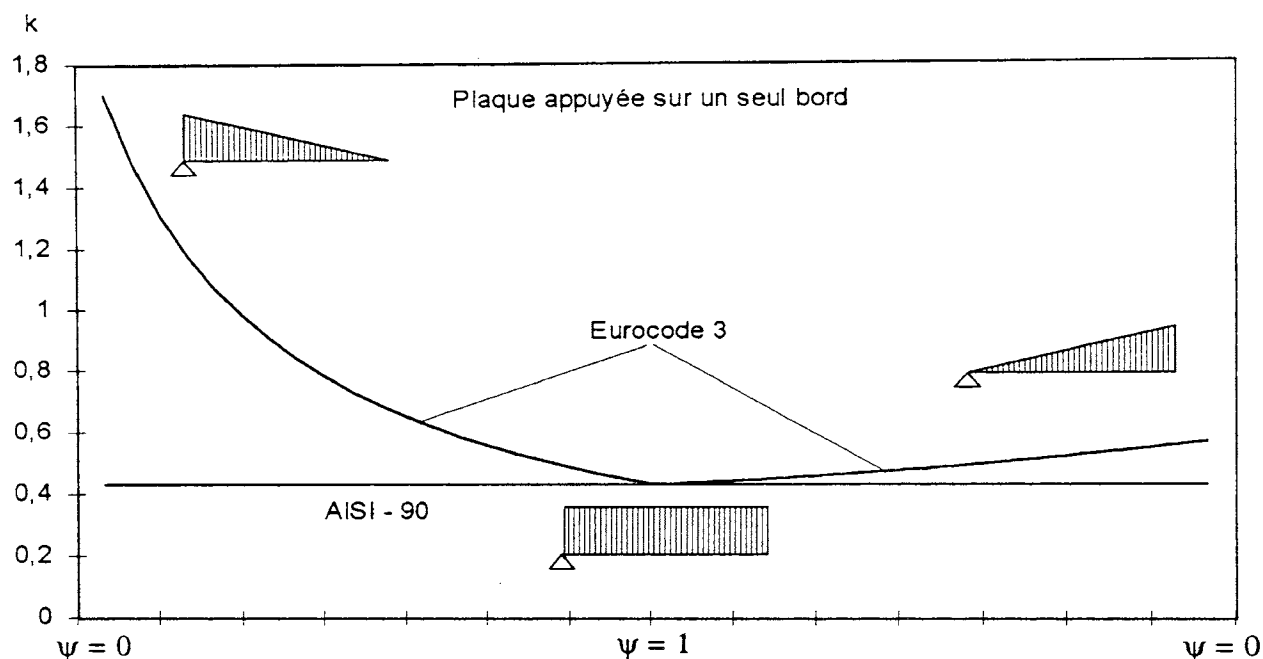


Figure 2.46- Comparaison de coefficients de voilement  $k$  pour la plaque appuyée sur un seul bord, entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90.

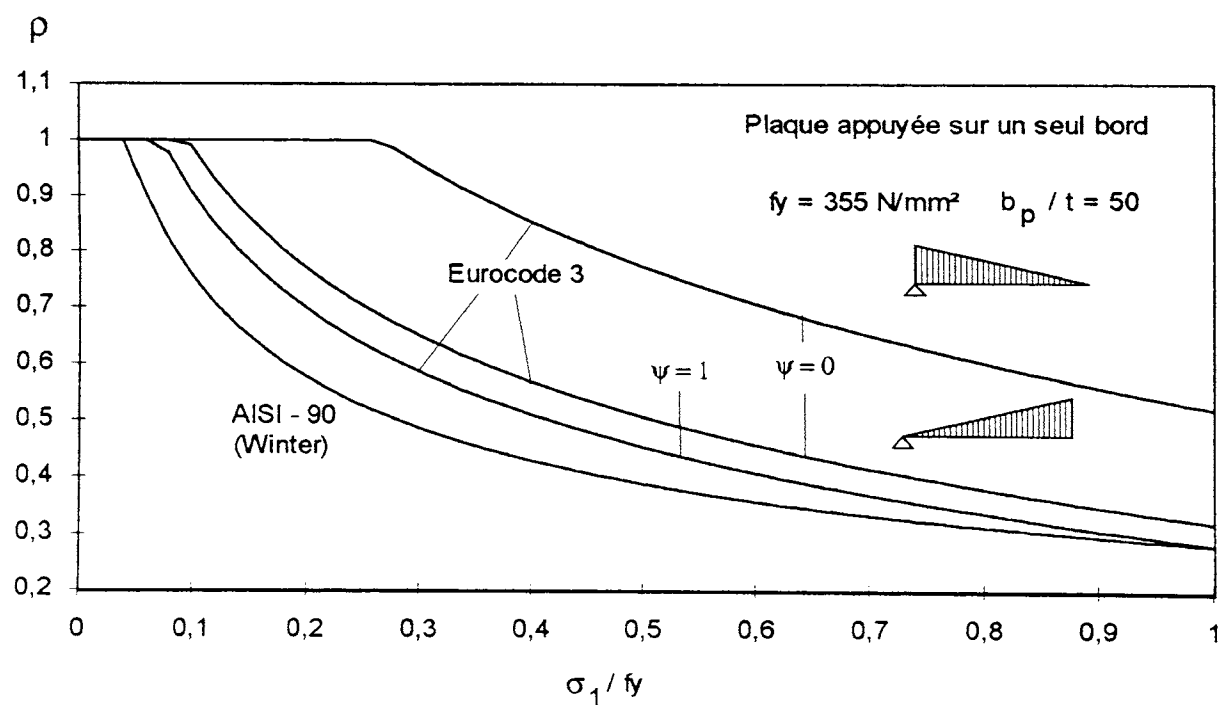


Figure 2.47- Comparaison des approches de calcul de largeur effective pour la plaque appuyée sur un seul bord, entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90.

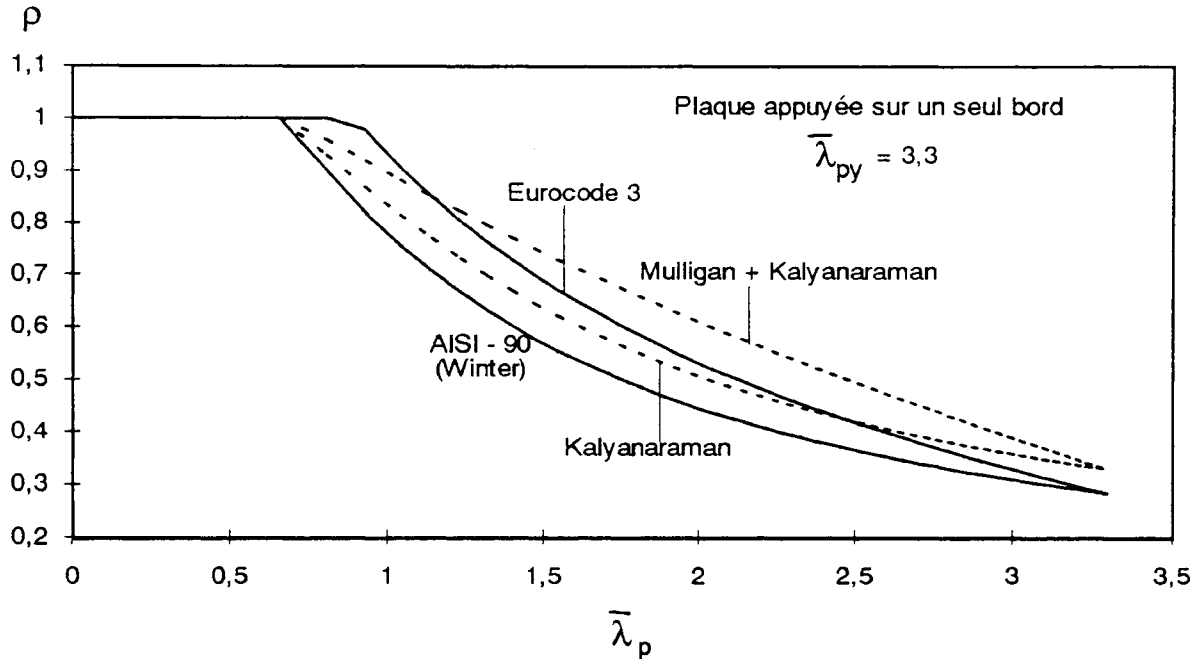


Figure 2.48- Comparaison entre plusieurs approches de calcul de la largeur effective pour la plaque appuyée sur un seul bord.

#### 2.5.4. Traitement du raidisseur du profil C

##### 2.5.4.1. Selon l'AISI-90

Comme déjà vu au paragraphe 2.4.4, l'étude théorique de l'instabilité de la section en C montre que l'efficacité du raidisseur est pénalisée lorsque le rapport  $b_3/b_1$  est tel que  $b_3/b_1 < 0,1$  or  $b_3/b_1 > 0,3$ . Egalement, à partir de la solution du calcul de stabilité présentée à la figure 2.38 on remarque que pour des rapports  $b_2/b_1 < 1$  normalement trouvés en pratique, le coefficient de voilement  $k_2$  de la semelle est plus petit que 4, ce qui correspond à la plaque simplement appuyée aux deux bords. Ainsi, l'effet de l'interaction de voilement entre les parois justifie pleinement pourquoi on trouve expérimentalement  $k_2 < 4$ . Cependant, la norme Américaine néglige cet effet de l'interaction de voilement et préconise que si l'inertie en flexion du raidisseur a au moins une certaine valeur nommée  $I_a$ , inertie adéquate, alors on considère la semelle avec  $k_2 = 4$ . Si ce n'est pas le cas, la valeur de  $k_2$  et les largeurs effectives de la semelle et du raidisseur sont réduites.

Avant de poursuivre la description détaillée de l'approche proposée par l'AISI-90, il est d'abord nécessaire de donner la notation suivante, qui se trouve représentée à la figure 2.49.

$\sigma_f$ - contrainte de compression uniforme agissant sur la semelle.

## II - Stabilité et ruine de plaques

$$S = 1,28\sqrt{E/\sigma_f} \quad (2.88)$$

$b_{p2}, b_{p3}, D$ - largeurs dont les dimensions sont définies à la figure 2.49.

$b_e$ - largeur effective de la semelle calculée avec  $k_2$ , conformément au paragraphe 2.5.2 (formule de Winter).

$b_{e3}$ - largeur effective du raidisseur conformément au paragraphe 2.5.3.

$c_1, c_2$ - coefficients de redistribution des largeurs effectives définis à la figure 2.49.

$I_s$ - inertie en flexion du raidisseur, plaque de largeur  $b_{p3}$ , autour d'un axe passant par son centre de gravité et parallèle à la plaque à raidir, la semelle:

$$I_s = \frac{tb_{p3}^3}{12} \quad (2.89)$$

$I_a$ - inertie en flexion adéquate du raidisseur.

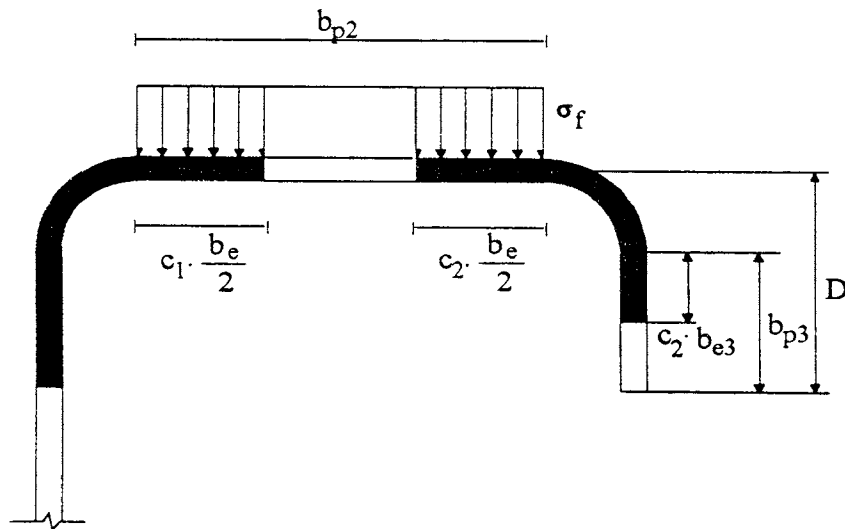


Figure 2.49- Notation utilisée pour le calcul des largeurs effectives de l'ensemble semelle-raideur.

Afin de justifier l'apparition de la variable  $S$  définie par l'expression 2.88, il est utile de noter les relations suivantes:

$$\frac{b_{p2}}{t} \leq \frac{S}{3} \Leftrightarrow \bar{\lambda}_{p)plaque2} \leq 0,673 \quad \text{avec} \quad k_2 = 0,43 \quad (2.90)$$

$$\frac{b_{p2}}{t} \leq S \Leftrightarrow \bar{\lambda}_{p)plaque2} \leq 0,673 \quad \text{avec} \quad k_2 = 4 \quad (2.91)$$

Finalement, pour le calcul des coefficients  $c_1$  et  $c_2$ , voir figure 2.49, et du coefficient de voilement  $k_2$  de la semelle, l'AISI-90 distingue les trois cas suivants:



Cas 1)  $\frac{b_{p2}}{t} \leq \frac{S}{3}$   
 $I_a = 0$  (la présence du raidisseur n'est pas nécessaire) (2.92)

$$b_e = b_{p2} \quad (2.93)$$

$$c_1 = c_2 = 1 \quad (2.94)$$

Cas 2)  $\frac{S}{3} < \frac{b_{p2}}{t} < S$

$$\frac{I_a}{t^4} = 399 \left[ \frac{b_{p2}/t}{S} - 0,33 \right]^3 \quad (2.95)$$

$$n = 1/2 \quad (2.96)$$

$$c_2 = \frac{I_s}{I_a} \leq 1 \quad (2.97)$$

$$c_1 = 2 - c_2 \quad (2.98)$$

$$k_2 = \left[ 4,82 - 5 \left( \frac{D}{b_{p2}} \right) \right] \left( \frac{I_s}{I_a} \right)^n + 0,43 \leq 5,25 - 5 \left( \frac{D}{b_{p2}} \right) \text{ pour } 0,8 \geq \frac{D}{b_{p2}} > 0,25 \quad (2.99)$$

$$k_2 = 3,57 \left( \frac{I_s}{I_a} \right)^n + 0,43 \leq 4 \quad \text{pour } \frac{D}{b_{p2}} \leq 0,25 \quad (2.100)$$

Cas 3)  $\frac{b_{p2}}{t} \geq S$

$$\frac{I_a}{t^4} = \left[ 115 \frac{(b_{p2}/t)}{S} \right] + 5 \quad (2.101)$$

$$n = 1/3 \quad (2.102)$$

$c_1, c_2$  et  $k_2$  ont les mêmes expressions que celles du cas 2.

Les variations du rapport  $I_a/t^4$  et de l'exposant  $n$  avec la valeur de  $S = 1,28\sqrt{E/\sigma_f}$  sont montrées aux figures 2.50 et 2.51, respectivement. La figure 2.50 montre très nettement l'augmentation de l'inertie adéquate  $I_a$  avec l'accroissement de la contrainte de compression  $\sigma_f$ , la valeur de  $S$  diminue. Quant à la valeur de  $n$ , la figure 2.51 met en évidence la discontinuité de cette variable pour l'abscisse  $S = b_{p2}/t$ .

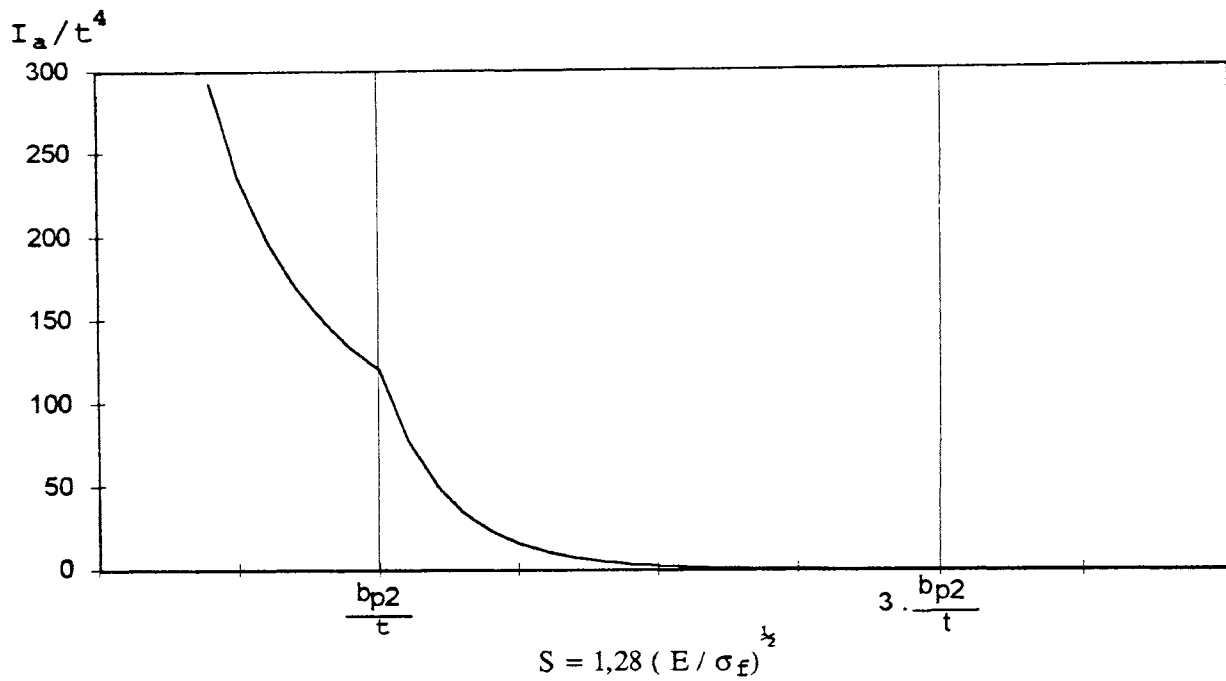


Figure 2.50- Variation du rapport  $I_a/t^4$  avec  $S$ .

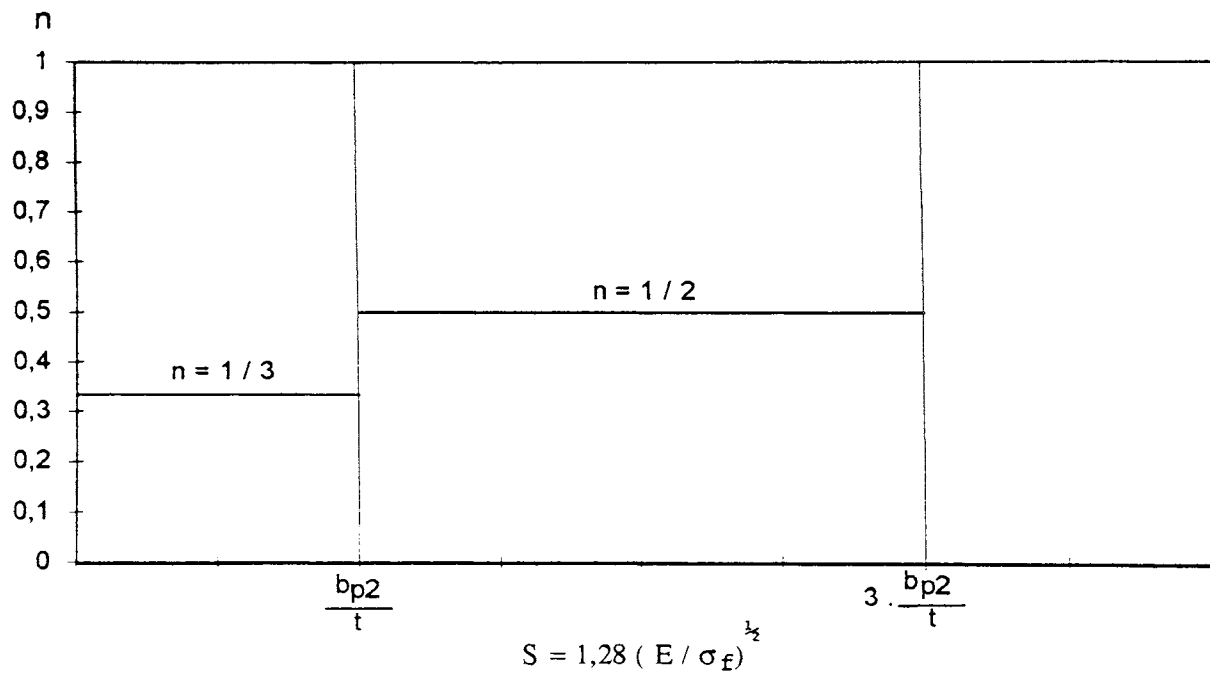


Figure 2.51- Variation de l'exposant  $n$  avec  $S$ .

L'utilisation de cette approche dans l'élément fini présente une limitation et un problème: elle ne tient pas compte d'un gradient de contraintes dans la semelle, d'une part, et la discontinuité de la valeur de  $n$  (voir figure 2.51), d'autre part, respectivement.

En ce qui concerne la prise en compte d'un gradient de contraintes, une adaptation a été envisagée. La figure 2.52 montre les dispositions supplémentaires qui ont été ajoutées à celle de la figure 2.49 pour cette adaptation.

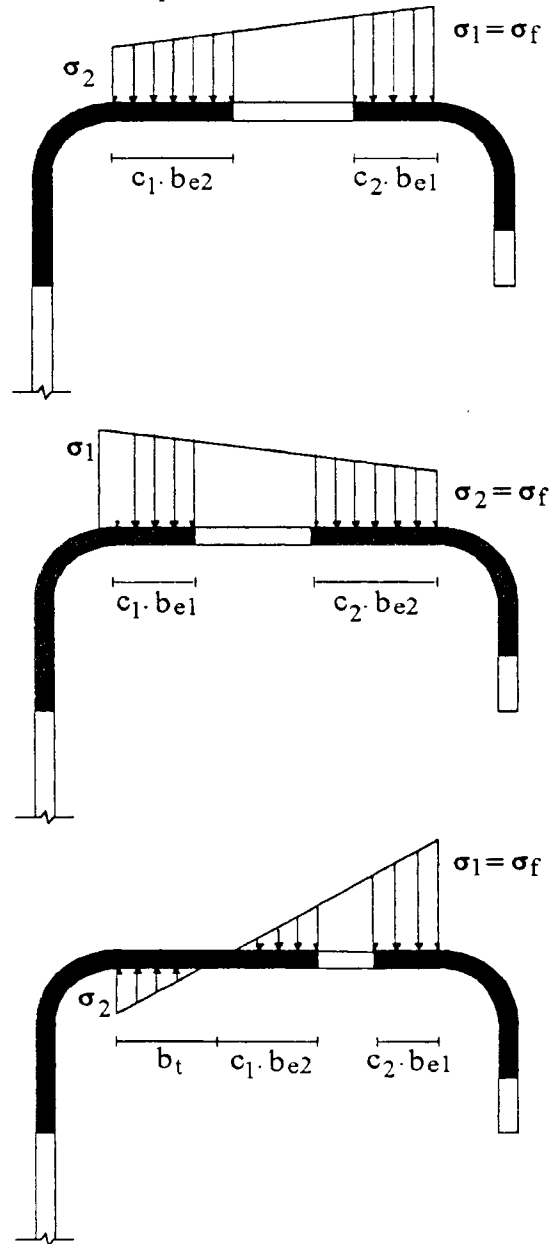


Figure 2.52- Dispositions supplémentaires pour tenir compte d'un gradient de contraintes sur la semelle.

## II - Stabilité et ruine de plaques

Enfin, on propose de modifier les expressions du coefficient de voilement  $k_2$  de la semelle de manière à que le gradient de contraintes sur celle-ci soit pris en compte. Ainsi, il n'y a qu'à changer les expressions pour les cas 2 et 3, à savoir:

$$\text{Cas 2 et 3)} \quad S < 3 \frac{b_{p2}}{t}$$

$$k_2 = k_{(\psi)} \frac{\left[ 4,82 - 5 \left( \frac{D}{b_{p2}} \right) \right] \left( \frac{I_s}{I_a} \right)^n + 0,43}{5,25 - 5 \left( \frac{D}{b_{p2}} \right)} \quad \text{pour } 0,8 \geq \frac{D}{b_{p2}} > 0,25 \quad (2.103)$$

$$k_2 = k_{(\psi)} \frac{3,57 \left( \frac{I_s}{I_a} \right)^n + 0,43}{4,0} \quad \text{pour } \frac{D}{b_{p2}} \leq 0,25 \quad (2.104)$$

où  $k_{(\psi)}$  est calculé selon le paragraphe 2.5.2, voir tableau 2.3. On voit que dans les expressions (2.103) et (2.104) de  $k_2$ , on multiplie  $k_{(\psi)}$  par le rapport entre l'expression de  $k_2$  et sa valeur maximum des expressions (2.99) et (2.100), respectivement. Finalement, le calcul de  $b_{e1}$  et  $b_{e2}$  de la figure 2.52 se fait selon l'AISI-90, paragraphe 2.5.2, à condition d'utiliser les expressions (2.103) et (2.104) pour le calcul du coefficient de voilement  $k_2$  de la semelle.

Quant à la discontinuité de la valeur de  $n$ , la proposition donnée à la figure 2.53 a été adoptée. Sur cette figure, l'abscisse  $Q$  prend l'expression suivante:

$$Q = \frac{S}{b_{p2}/t} \quad (2.105)$$

Finalement, les expressions suivantes ont été adoptées pour la valeur de  $n$ :

$$Q \geq 1,5 \rightarrow n = \frac{1}{2} \quad (2.106)$$

$$0,5 < Q < 1,5 \rightarrow n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left( Q - \frac{1}{2} \right) \quad (2.107)$$

$$Q \leq 0,5 \rightarrow n = \frac{1}{3} \quad (2.108)$$

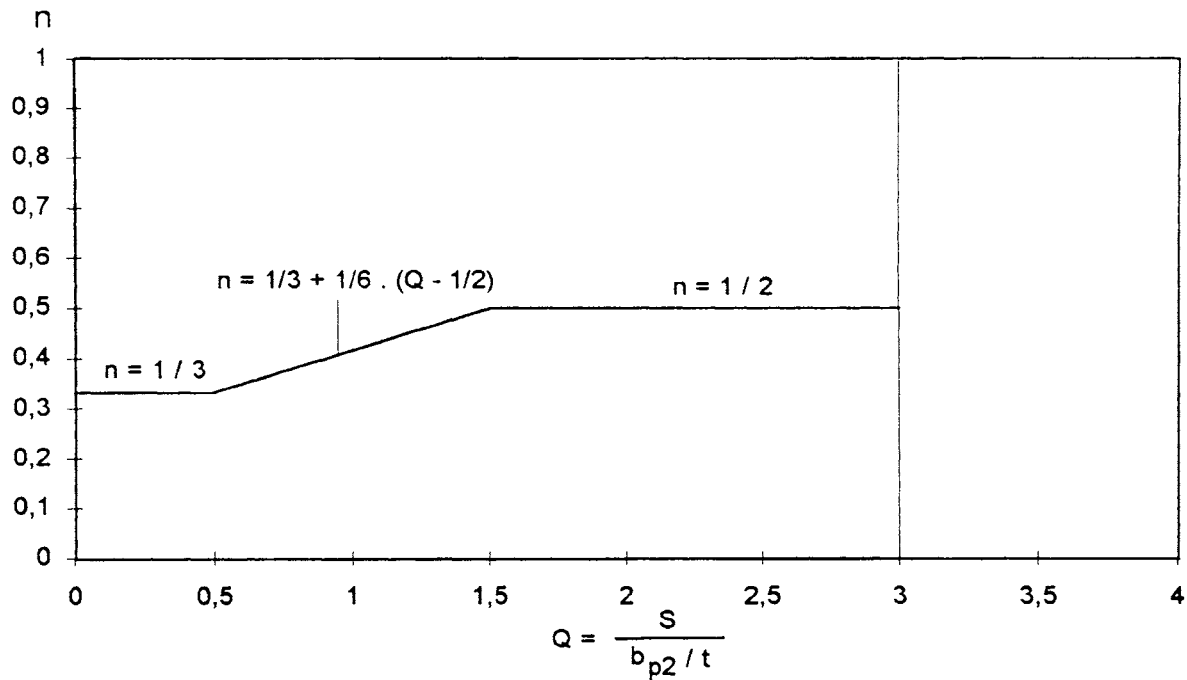


Figure 2.53- Proposition pour le calcul de l'exposant  $n$  afin de faire disparaître la discontinuité de la figure 2.51.

Malgré tous ces ajustements, il reste encore un petit détail à régler concernant la valeur de la variable  $c_1$  qui affecte la largeur  $b_{e1}$  ou  $b_{e2}$ , voir figure 2.52. Comme le montre l'expression (2.98)  $c_1$  prend toujours une valeur plus grande ou égale à 1 parce que  $c_2$ , donné par l'expression (2.97), est toujours plus petit ou égal à 1. Par soucis de simplicité, la valeur de  $c_1$  doit toujours être égale à 1. L'exemple suivant aidera à comprendre ce problème. Supposons une colonne comprimée excentriquement avec la disposition et la discrétisation montrées à la figure 2.54.

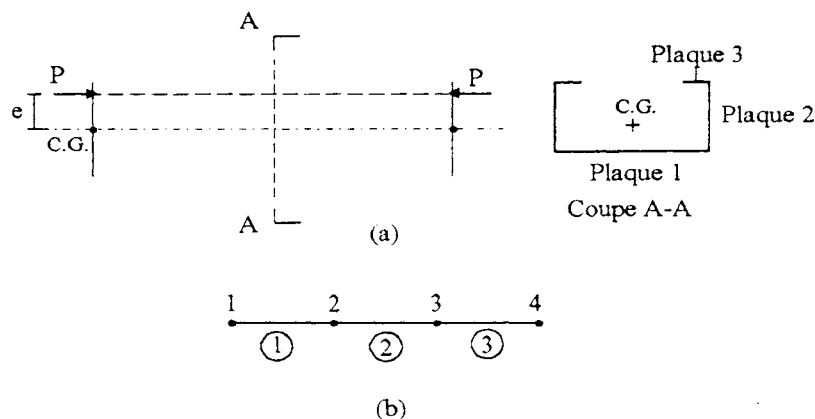


Figure 2.54- Exemple pour aider à comprendre pourquoi  $c_1$  doit être égal à 1.

- (a) Disposition;
- (b) Discrétisation.

A cause de la non-linéarité on voit que l'élément fini 2 est le plus sollicité. Utiliser une valeur de  $c_1$  plus grande que 1 pour l'élément 2 risque de donner une largeur effective de la plaque 2 du côté du bord d'intersection avec la plaque 1 plus grande que celles des éléments finis 1 et 3 qui sont moins sollicités; ce qui serait illogique.

### 2.5.4.2. Selon l'Eurocode 3

Comme on le verra dans ce paragraphe, la méthode proposée par l'Eurocode 3 est de loin plus compliquée que celle proposée par l'AISI-90 pour le calcul des largeurs effectives de l'ensemble semelle-raideur du profil C. Cependant, la proposition de l'Eurocode 3 semble être plus logique car elle tient compte, d'une certaine manière, de l'effet d'interaction de voilement entre les parois. La figure 2.55 montre la disposition des largeurs effectives. L'Eurocode 3 préconise que la semelle ne puisse être considérée convenablement appuyée sur le raidisseur que si l'angle entre les deux ne s'écarte pas de l'angle droit d'un angle plus grand que  $45^\circ$  et si  $D > 0,2b_{p2}$ . Si ces conditions ne sont pas satisfaites la semelle doit être considérée comme une plaque avec un bord libre.

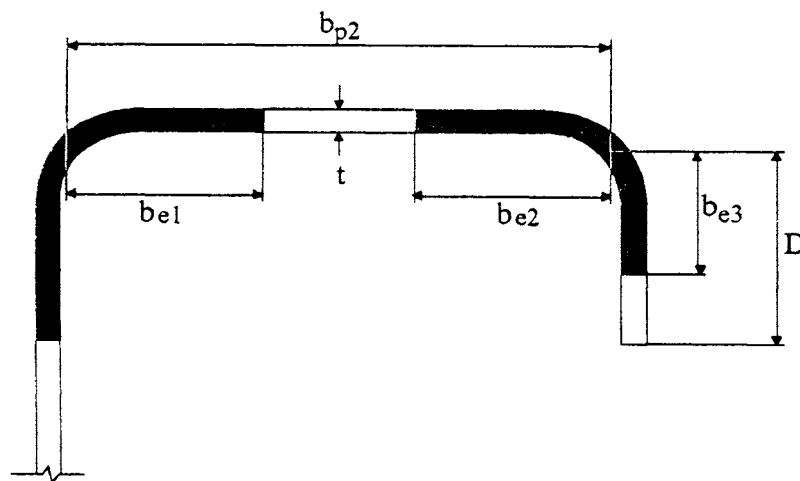


Figure 2.55- Disposition des largeurs effectives de l'ensemble semelle-raideur selon l'Eurocode 3.

La proposition de l'Eurocode 3 est basée sur l'hypothèse que l'ensemble formé par les largeurs  $b_{e2}$  et  $b_{e3}$ , montrées à la figure 2.55, est en quelque sorte une poutre-colonne sur une fondation élastique, dont la raideur dépend des inerties en flexion de l'âme et de la semelle, plaques 1 et 2 respectivement, et du type de sollicitation prépondérante sur la section transversale du profil. La figure 2.56 illustre très clairement ces considérations, où, afin de ne pas alourdir l'exposé, des formules très courantes de la résistance des matériaux y sont aussi données pour le calcul de la raideur  $C_T$  (N/mm<sup>2</sup>) de l'appui élastique.

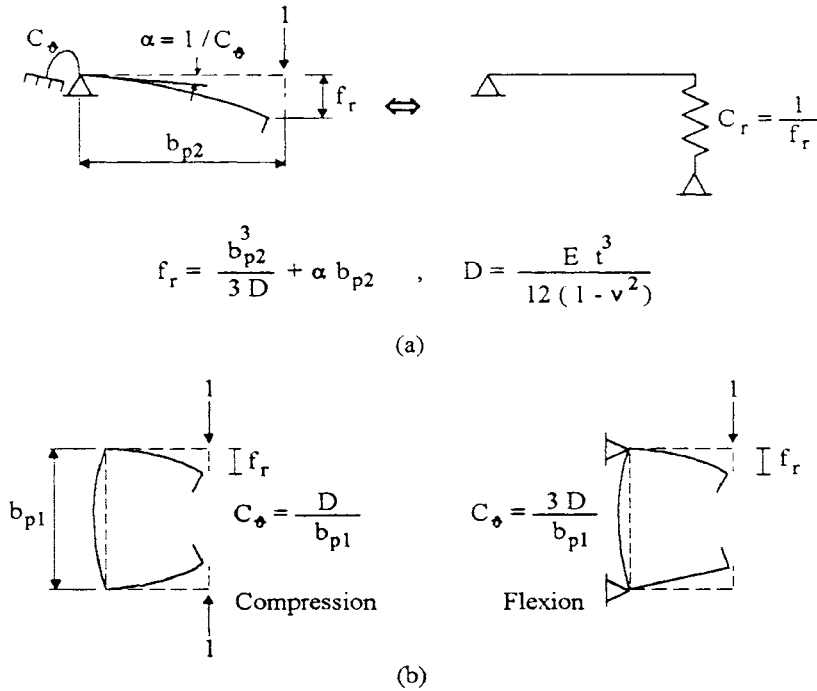


Figure 2.56- Considérations pour le calcul de la raideur de l'appui élastique.

- (a) Modèle physique;  
(b) Type de sollicitation.

Finalement, le calcul des largeurs effectives se déroule avec les étapes suivantes:

- 1) Le calcul des largeurs effectives se fait à l'état limite ultime avec la contrainte au bord commun de la semelle et du raidisseur égale à la limite élastique  $f_y$ ;
- 2) Calcul des largeurs  $b_{e1}$  et  $b_{e2}$ , montrées à la figure 2.55, selon le paragraphe 2.5.2 pour l'Eurocode 3;
- 3) Calcul de la largeur  $b_{e3}$ , montrée à la figure 2.55, selon le paragraphe 2.5.3 pour l'Eurocode 3, en utilisant les expressions suivantes pour le calcul du coefficient de voilement du raidisseur:

$$k_3 = 0,5 \quad \text{si} \quad D/b_{p2} \leq 0,35 \quad (2.109a)$$

$$k_3 = 0,5 + 0,83 \left[ \left( D/b_{p2} \right) - 0,35 \right]^{2/3} \quad \text{si} \quad 0,35 < D/b_{p2} \leq 0,6 \quad (2.109b)$$

- 4) Calcul de  $A_r$ , aire, et  $I_r$ , inertie en flexion, de la section formée par les largeurs  $b_{e2}$  et  $b_{e3}$  avec une épaisseur égale à  $t$ , comme montré à la figure 2.55. Pour ces calculs l'arrondi peut être négligé et considéré comme un coin anguleux si les conditions déjà données au début du paragraphe 2.5.2 sont satisfaites. L'inertie  $I_r$  doit être calculée par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section de l'aire  $A_r$  et parallèle à la semelle;

## II - Stabilité et ruine de plaques

- 5) Calcul de la contrainte de flambement idéale de la poutre-colonne de l'aire  $A_r$  sur une fondation élastique, donnée par la formule suivante:

$$\sigma_{cr,r} = \frac{2\sqrt{C_r EI_r}}{A_r} \quad (2.110)$$

- 6) Calcul de la contrainte de flambement réduite  $\sigma_c$  à la ruine à l'aide de la courbe de flambement Européenne  $a_0$ :

- 6.1) Calcul de l'élancement réduit  $\bar{\lambda}_{ry}$ :

$$\bar{\lambda}_{ry} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,r}}} \quad (2.111)$$

- 6.2) Calcul du facteur de réduction  $\chi$  avec la courbe  $a_0$  ( $\alpha = 0,13$ ):

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}_{ry}^2]^{1/2}} \leq 1 \quad (2.112)$$

avec:

$$\phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha (\bar{\lambda}_{ry} - 0,2) + \bar{\lambda}_{ry}^2 \right] \quad (2.113)$$

- 6.3) Calcul de la contrainte de flambement réduite  $\sigma_c$ :

$$\sigma_c = \chi f_y \quad (2.114)$$

- 7) Si  $\chi < 1$ , la contrainte de ruine  $\sigma_c$  sera plus petite que celle de l'hypothèse de départ,  $f_y$ . Afin de pouvoir ramener tous les calculs à  $f_y$ , on diminue l'épaisseur de la section d'aire  $A_r$  en l'affectant du facteur de réduction  $\chi$ :

$$t_{ef} = \chi t \quad (2.115)$$

où  $t_{ef}$  est une épaisseur effective. La figure 2.57 montre ces considérations.

- 8) Si  $\chi < 1$  l'Eurocode 3 préconise de faire encore deux itérations afin de trouver une valeur de  $\chi$  plus exacte. Chaque itération consiste à répéter les étapes de 2 à 7 où le calcul des largeurs  $b_{e1}$ ,  $b_{e2}$  et  $b_{e3}$  des étapes 2 et 3 se fait avec la contrainte  $\sigma_c$  de l'itération antécédente.



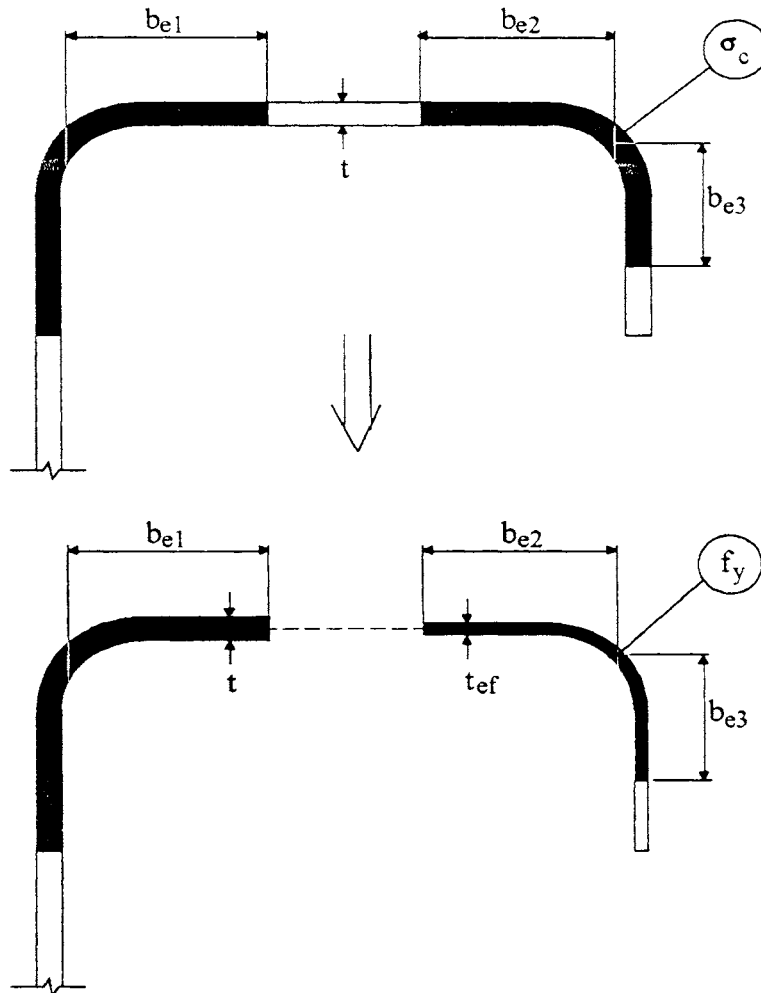


Figure 2.57- Considérations pour l'utilisation d'une épaisseur effective afin de pouvoir travailler avec la limite élastique  $f_y$ .

L'approche qu'on vient de voir a été récemment proposée dans la nouvelle version de l'annexe A de l'Eurocode 3, et l'auteur n'a pu en prendre connaissance que lorsque cette thèse était déjà en phase de rédaction. En conséquence aucune adaptation de cette approche n'a pu être entreprise afin de l'introduire dans l'élément fini. Ainsi, pour le calcul de profils de section en C selon l'Eurocode 3, il faut se contenter des approches présentées aux paragraphes 2.5.2 et 2.5.3 pour le calcul de largeurs effectives des plaques appuyées sur les deux bords (âme et semelles) et appuyées sur un seul bord (raidisseur), respectivement, sans aucun regard à l'efficacité du raidisseur.

## 2.6. LA LARGEUR EFFECTIVE DANS L'ELEMENT FINI

### 2.6.1. Plaque avec trois bords simplement appuyés et un bord libre

Lors des essais numériques avec l'élément fini de poutre spatiale avec prise en compte du voilement au moyen de largeurs effectives, on a constaté que pour des profils où la variation de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord joue un rôle très important comme pour la cornière et le profil U, l'utilisation des formules du paragraphe 2.5.3 entraîne un changement très rapide de la largeur effective, ce qui rend impossible la convergence de l'élément fini. En réalité, le calcul numérique converge dans le premier pas après le début du voilement et en suite il ne converge plus dans le pas suivant.

Afin de ne pas exclure la cornière et le profil U des résultats de cette thèse, l'auteur a entrepris plusieurs tentatives pour ralentir la variation de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord. Parmi ces tentatives, la seule qui a donné satisfaction est celle montrée à la figure 2.58. On peut y remarquer qu'au lieu de prendre la contrainte de compression la plus grande aux bords de la plaque,  $\sigma_1$ , on utilise la contrainte moyenne des extrémités de la largeur effective  $b_e$ . La deuxième modification consiste à substituer la largeur comprimée  $b_c$  à la largeur totale  $b_p$  dans le calcul de  $\bar{\lambda}_p$  et de  $\bar{\lambda}_{py}$ .

Eu égard aux modifications introduites pour le calcul de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord, l'auteur a pu imaginer trois hypothèses explicatives possibles:

- a) Comme déjà dit au paragraphe 2.2.4, DEWOLF et GLADDING [31] ont montré que, pour une plaque appuyée aux deux bords et soumise à la flexion dans son plan, le gradient moyen de contraintes de la partie comprimée est différent de celui de la partie tendue de la plaque, voir figure 2.20. Donc, le gradient de contraintes soit de la partie comprimée, soit de la partie tendue, sont différents du gradient de contraintes supposé en liant les contraintes aux extrémités de la plaque. Malgré qu'il n'y ait pas de résultat semblable dans la littérature pour la plaque appuyée sur un seul bord, il est aisé de comprendre que calculer le gradient de contraintes comme montré au tableau 2.4 selon l'Eurocode 3 ne donne un compromis pour le gradient de contraintes réel dans la plaque. Cependant, on ne saurait pas le calculer autrement d'une manière pratique et de toute façon la prise en compte du gradient de contraintes représente déjà une avance sur la spécification AISI-90, qui le néglige;
- b) Dû au fait que la convergence de l'élément fini est très sensible à la variation de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord, il se peut que le conservatisme exagéré de l'utilisation de la formule d'Winter (2.40) pour définir sa ruine ait contribué à poser des difficultés de convergence dans l'élément fini;

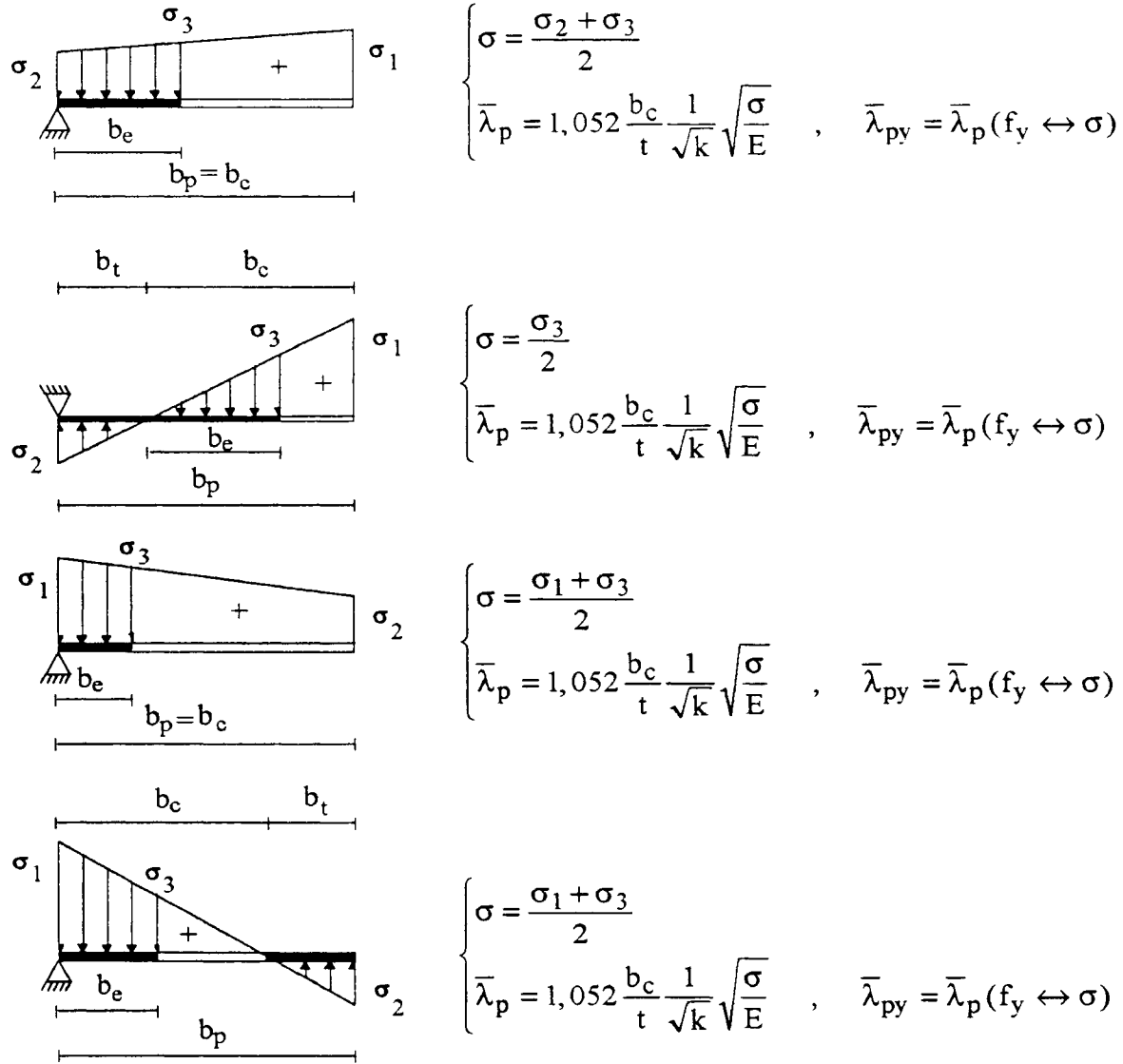


Figure 2.58- Les modifications faites pour le calcul de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord.

c) La dernière hypothèse explicative plausible pour justifier les modifications montrées à la figure 2.58 pourrait provenir du fait que lors de ses essais expérimentaux exhaustifs pour déduire sa formule de largeur effective, Winter avait négligé les effets d'interaction en voilement entre les plaques. Ainsi, il s'est contenté d'utiliser  $k = 4$  et  $k = 0,43$  pour les plaques appuyées aux deux bords et pour les plaques appuyées sur un seul bord, respectivement. Le fait de négliger l'interaction en voilement entre les plaques pourrait être une des causes de la grande dispersion de largeurs effectives trouvées expérimentalement, ce qui l'aurait conduit à proposer une formule conservatrice bornée supérieurement aux largeurs effectives les plus petites trouvées expérimentalement. Ainsi, on tombe de nouveau sur ce qui a déjà été expliqué dans l'hypothèse b.

## II - Stabilité et ruine de plaques

Dans les paragraphes suivants on présente un résumé des propositions de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90, ainsi que deux propositions originales pour le calcul de largeurs effectives dans l'élément fini et dont les résultats obtenus pour les profils cornières, U et C sont montrés au chapitre 5 de cette thèse.

### **2.6.2. Eurocode 3**

Les largeurs effectives sont calculées selon les tableaux 2.3 et 2.4 pour la plaque appuyée aux deux bords et pour la plaque appuyée sur un seul bord, respectivement. En plus, il est aussi utile de rappeler les remarques suivantes:

- a) Pour la plaque appuyée sur un seul bord,  $\bar{\lambda}_p$  et de  $\bar{\lambda}_{py}$  sont calculés comme montré dans la figure 2.58;
- b) Les coefficients de voilement de plaques du profil sont recalculés à chaque itération du pas non linéaire pour tenir compte du changement progressif du gradient de contraintes dans la section dû à la non linéarité géométrique;
- c) Les plaques sont considérées isolées et donc, aucun effet d'interaction en voilement entre les plaques du profil n'est pris en compte;
- d) Cette proposition a été testée pour les profils cornière, U et C. Les résultats numériques sont présentés au chapitre 5.

### **2.6.3. AISI-90**

Les largeurs effectives sont calculées selon les tableaux 2.3 et 2.4 pour la plaque appuyée aux deux bords et pour la plaque appuyée sur un seul bord, respectivement. En plus, il est aussi utile de rappeler les remarques suivantes:

- a) Dû au fait que cette spécification néglige le gradient de contraintes dans le cas de la plaque appuyée sur un seul bord (voir tableau 2.4), elle n'a pu être appliquée qu'au seul profil C, où la variation de la largeur effective du raidisseur de la semelle ne joue pas un rôle très important pour la convergence de l'élément fini;
- b) L'efficacité du raidisseur n'est pas prise en compte et donc, les spécifications citées au paragraphe 2.5.4.1 sont négligées;
- c) Les remarques b et c du paragraphe 2.6.2 pour l'Eurocode 3 sont aussi valables ici;
- d) Pour l'âme du profil C on utilise la courbe de voilement de la combinaison Mulligan+Winter avec la parabole, comme déjà dit au paragraphe 2.5.2, alors que pour la semelle on utilise la courbe de WINTER comme spécifié au tableau 2.3;
- e) Quant à la répartition de la largeur effective de la plaque appuyée aux deux bords, le calcul de la largeur  $b_{e2}$  est fait selon l'ajustement montré à la figure 2.45 par la courbe pointillée, afin d'éliminer la discontinuité que présente la courbe originale de  $b_{e2}$ .

#### 2.6.4. AISI-90\*

Dans cette proposition toutes les remarques déjà faites au paragraphe 2.6.3 pour l'AISI-90 sont aussi valables ici, sauf la remarque b. Cette fois les largeurs effectives de la semelle et du raidisseur du profil C sont calculées selon les adaptations déjà montrées au paragraphe 2.5.4.1 afin de tenir compte de l'efficacité du raidisseur.

#### 2.6.5. Proposition A

Le but principal de cette proposition n'est d'autre que celui de tenir compte de l'interaction en voilement entre les plaques du profil. Le tableau 2.5 résume les procédures de calcul de largeurs effectives de cette proposition.

Proposition A	Plaque appuyée aux deux bords	Plaque avec un bord libre
Coefficient de voilement	Cornières à ailes égales - $k = 0,43$ Profil U - expression (2.77) combinée avec la relation (2.76) Profil C - expression (2.79) combinée avec la relation (2.76)	
Formule de largeur effective	La combinaison Mulligan + Winter et la parabole	La combinaison Mulligan + Kalyanaraman et la parabole
	déjà expliquées au paragraphe 2.3	
Répartition de la largeur effective $b_e$ en $b_{e1}$ et $b_{e2}$	Selon la remarque e du paragraphe 2.6.3 pour l'AISI-90	Ne s'applique pas

Tableau 2.5- Description générale de la proposition A pour le calcul de largeurs effectives dans l'élément fini.

Il est encore toutefois utile de souligner les remarques suivantes à propos de cette proposition:

- Les coefficients de voilement utilisés sont pour la section transversale soumise à la compression uniforme, or dans le cas de profils qui sont chargés excentriquement les coefficients de voilement employés ne sont pas adéquats. Malgré cela, on considère qu'on tient compte quand même, dans une certaine mesure, de l'interaction en voilement entre les plaques;
- Il faut noter que, contrairement aux propositions de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90, les coefficients de voilement de plaques restent inchangés en cours de chargement du profil. Donc, ils ne sont pas mis à jour à chaque itération du pas non linéaire pour tenir

compte du changement progressif du gradient de contraintes dans la section transversale dû aux non linéarités géométriques.

### **2.6.6. Proposition B**

Cette proposition est très semblable à celle de l'Eurocode 3, paragraphe 2.6.2. En effet, il n'y a que deux différences:

- a) Pour la plaque appuyée aux deux bords, on remplace la formule de largeur effective proposée au tableau 2.3 par la combinaison Mulligan + Winter et la parabole;
- b) Pour la plaque appuyée sur un seul bord, on remplace la formule de largeur effective proposée au tableau 2.4 par la combinaison Mulligan + Kalyanaraman et la parabole.

Le but d'ajouter cette proposition est de pouvoir comparer ses résultats avec les résultats de l'Eurocode 3 et de la proposition A lors des essais numériques avec la cornière et le profil U présentés au chapitre 5 de cette thèse.

### **2.7. LA LARGEUR EFFECTIVE EN PLASTICITE**

Toutes les formules de largeurs effectives vues jusqu'ici sont d'application dans le domaine élastique. Cependant, certains chercheurs comme GERARD [23], STOWELL [58] et MAYERS et BUDIANSKY [59] proposent de calculer la largeur effective, après plastification de la plaque, en remplaçant le rapport de contraintes par le rapport de déformations dans l'expression de l'élancement réduit de la plaque, équation (2.29). Ainsi, sa nouvelle expression devient:

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_{cr,p}}} \quad (2.116)$$

Toutefois, cette approche de calcul de largeur effective en plasticité n'a pas été adoptée pour le calcul numérique par élément fini à cause des motifs suivants:

- a) Elle n'est valable que pour la plaque appuyée aux deux bords, alors qu'il n'existe aucune proposition pour la plaque appuyée sur un seul bord;
- b) Elle a été conçue pour la plaque soumise à la compression uniforme. Dans le cas général de la plaque soumise à un gradient de contraintes, il y aura certainement un bord qui est plus comprimé que l'autre et qui atteint la plastification en premier. Cependant, le calcul de largeurs effectives avec (2.116) pénalisera simultanément les largeurs  $b_{e1}$  et  $b_{e2}$  alors qu'il n'y a qu'un seul bord où la plastification a déjà eu lieu;
- c) Malgré les remarques 'a' et 'b' citées ci-dessus, l'auteur a quand même essayé cette proposition dans l'élément fini dans le but de simuler numériquement la rotule plastique qui se forme au milieu de la colonne comprimée. On a pu constater que mélanger la plasticité avec une variation plus rapide de la largeur effective par rapport au cas

élastique pose des problèmes de convergence dans l'élément fini. Donc, il faut se contenter de ne pas faire varier les largeurs effectives des plaques dans l'élément fini sauf en régime élastique. Lorsqu'un point d'intégration quelconque de la surface moyenne de la section transversale de l'élément fini plastifie, les largeurs effectives dans cet élément restent inaltérées;

- d) Il est bien connu que pour effectuer le calcul plastique, il faut suivre l'histoire des déformations de chaque point d'intégration. Pour cela, il faut que la position de chaque point d'intégration reste fixe. Or, lorsque la section transversale de l'élément fini est variable à cause des largeurs effectives de ses plaques qui sont mises à jour à chaque itération, les points d'intégration doivent se situer à l'intérieur de la nouvelle dimension de la largeur effective. Donc, leurs positions sont aussi variables à chaque itération. Ce dernier motif serait déjà suffisant pour condamner le calcul plastique de l'élément fini avec la largeur effective variable en plasticité. Pourtant, on a quand même essayé ce type de calcul parce que, comme il est bien connu, la méthode des largeurs effectives est déjà, par elle-même, une méthode semi-empirique approchée. Malgré cette tentative, comme déjà dit dans la remarque 'c', l'élément fini ne converge pas.

## **CHAPITRE 3**

### **L'INTERACTION ENTRE LE VOILEMENT LOCAL ET LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE**

3.1. DESCRIPTION DU PHENOMENE	3.1
3.2. LES METHODES DE CALCUL DES COLONNES CONSTITUEES PAR DES PROFILS A PAROIS MINCES	3.9
3.3. LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE	3.12
3.3.1. Introduction	3.12
3.3.2. Stabilité de colonnes	3.12
3.3.2.1. Cas particulier: sections à un axe de symétrie avec charge appliquée sur cet axe	3.22
3.3.3. Les instabilités couplées	3.26
3.4. LES METHODES DE DIMENSIONNEMENT SEMI-EMPIRIQUES DE L'EUROCODE 3 ET DE L'AIISI-90	3.28



# L'INTERACTION ENTRE LE VOILEMENT LOCAL ET LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE

## 3.1. DESCRIPTION DU PHENOMENE

Le phénomène d'interaction entre le voilement local des parois et le flambement global d'un profil à parois minces sera analysé à l'aide de la figure 3.1, tirée de la référence [52], avec quelques remarques ajoutées. Cette figure montre la variation de la contrainte critique de voilement de la section et de flambement global d'une colonne à section en C, soumise à une compression uniforme, avec la longueur critique  $L_{cr}$  de la demi-onde de voilement de la section ou de flambement de la colonne. Les dimensions de la section sont données sur la même figure. Les résultats sont obtenus par un calcul d'instabilité linéaire avec la méthode numérique des bandes finies où les bords communs des plaques constituant le profil sont libres de se déplacer transversalement à l'axe de la colonne.

D'une manière générale, on peut distinguer sur cette figure quatre modes différents d'instabilité désignés par les régions nommées de I à IV. Les points A et B correspondent aux minima primaire et secondaire des modes de voilement d'un tronçon court, soit le mode local (région I) et le mode local-distorsionnel (région II), respectivement, comme déjà discuté au paragraphe 2.4.4. Le comportement d'instabilité par flambement de colonne se produit dans la partie des grandes longueurs correspondante à la branche descendante de la courbe de droite. Sur cette branche on peut distinguer deux types de modes de flambement: celui de flexion-torsion (région III) pour des longueurs allant approximativement jusqu'à 1800 mm, point D sur la courbe, et celui de flexion (région IV) pour des longueurs plus grandes que 1800 mm. En outre, les valeurs obtenues pour la contrainte critique de flambement global sont très proches de celles fournies par TIMOSHENKO [7].

On note qu'il n'y a pas de résultats pour de très petites longueurs de la région I. Ceci s'explique par le fait que la méthode de bandes finies n'est pas adéquate pour représenter le phénomène d'instabilité lorsque la longueur du tronçon court est très petite par rapport aux dimensions de la section transversale. Il faudrait, dans ce cas, utiliser l'élément fini de coque. Malgré le fait que cette figure présente les contraintes critiques de la structure parfaite, elle peut servir pour une introduction au concept de l'interaction entre le voilement de la section et le flambement global de la colonne. Le minimum primaire, point A, étant le plus petit, c'est le mode d'instabilité par voilement local qui gouverne le voilement de la section dans le cas particulier de cette figure. Le point C, situé sur la branche descendante de la courbe, représente la longueur pour laquelle la contrainte critique de flambement par flexion-torsion de la colonne égale la contrainte critique de

voilement de la section. Donc, la longueur correspondante au point C doit caractériser, d'une certaine manière, le centre d'une région où il y a une forte interaction entre le voilement de la section et le flambement de la colonne. Il est clair que cette interaction ne peut avoir lieu qu'en présence d'imperfections. Le but de cette thèse est justement d'étudier le comportement d'équilibre et stabilité des profils qui se situent dans cette région. Cet interaction entraîne une diminution de la résistance de la colonne vis à vis de son flambement en l'absence du voilement de la section. Pour des longueurs de la colonne plus petites que celle correspondant au point C, la contrainte critique de voilement de la section est plus petite que la contrainte de flambement global de la colonne, le voilement précédera forcément le phénomène d'instabilité global, alors que, pour des longueurs de la colonne plus grandes que celle correspondant au point C, le voilement de la section sera prématuré par rapport au flambement global à cause des imperfections. Les imperfections géométriques (globales et locales) et structurales (contraintes résiduelles et dispersion de la limite élastique) entraînent un début de voilement prématuré par rapport à la valeur théorique, point A. D'une part, l'imperfection géométrique de l'axe de la colonne conduit à une amplification considérable de la contrainte de compression des plaques du profil situées du côté concave de la déformée de la colonne; d'autre part, les imperfections géométriques locales et les contraintes résiduelles sont responsables d'un voilement prématuré de la section par rapport à la contrainte critique idéale de voilement, comme déjà mentionné au paragraphe 2.2.2 pour les plaques isolées, il en va de même pour les sections formées par des plaques.

Le premier à entreprendre une étude de la sensibilité de la résistance de colonnes formées par des profils à parois minces vis à vis de leurs imperfections géométriques globales et locales est van der NEUT, ainsi qu'en témoigne une série de deux articles [60,61]. Van der NEUT utilise un modèle simplifié d'élément à parois minces, composé de deux semelles liées par une âme considérée comme rigide en cisaillement et latéralement mais ayant une rigidité longitudinale nulle. A l'aide de son modèle et d'une étude analytique, van der NEUT en tire les conclusions suivantes, où  $\sigma_{cr}$  est la contrainte critique par instabilité globale de la colonne,  $\sigma_{cr,s}$  est la contrainte critique de voilement de la section et  $R$  est le rapport  $\sigma_{cr}/\sigma_{cr,s}$ .

- a) L'équilibre est instable lorsque  $R = 1$ ;
- b) La sensibilité aux imperfections locales des semelles est plus prononcée pour des valeurs de  $R$  très proches de 1;
- c) La sensibilité aux imperfections de l'axe de la colonne est aussi plus prononcée pour des valeurs de  $R$  très proches de 1, surtout dans la région  $R > 1$ ;

Comme on vient de le voir, on peut dire, à la lumière des conclusions de van der NEUT, que le point C de la figure 3.1 est le centre d'une certaine région où la sensibilité de la charge de ruine aux imperfections généralisées de la colonne est la plus prononcée vis à vis

du phénomène d'interaction entre le voilement de la section et le flambement de la colonne.

Finalement, il faut remarquer que de la même façon qu'une plaque isolée garde une réserve post-critique, comme déjà mentionné au paragraphe 2.1.3, il en est de même pour les tronçons courts (régions I et II) et les tronçons longs (régions III et IV) qui peuvent résister, dans une certaine mesure, au-delà du début du voilement de la section.

La figure 3.2 illustre le phénomène d'interaction entre le voilement local et le flambement global à l'aide des courbes de flambement Européennes. Cette figure montre la courbe 'b' de flambement. Cette courbe est dessinée pour le cas 'Sans Voilement' et pour le cas 'Avec Voilement'. Pour le cas de voilement on a choisi arbitrairement que le rapport de l'aire effective à l'aire pleine vaut 0,7. La courbe d'Euler représente le cas des colonnes parfaites. Sur cette figure la notation utilisée est la suivante:

A - aire de la section pleine.

$A_e$  - aire de la section effective pour une compression uniforme égale à  $f_y$ .

$P_{ruine}$  - charge de ruine de la colonne.

$P_y$  - charge de ruine plastique ( $=A \cdot f_y$ ).

$P_{cr}$  - charge critique de flambement global de la colonne.

$\chi = \frac{P_{ruine}}{P_y}$  - coefficient de réduction au flambement.

$\bar{\lambda}_c = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cr}}}$  - élancement réduit de la colonne.

$a_{er}$  - érosion de la charge de ruine de la colonne imparfaite en négligeant le voilement par rapport au cas de la colonne parfaite.

$b_{er}$  - érosion de la charge de ruine de la colonne imparfaite avec voilement pris en compte par rapport au cas de la colonne imparfaite en négligeant le voilement.

Lorsqu'on considère les imperfections initiales de la colonne réelle, la courbe intitulée 'Sans Voilement' montre que l'érosion  $a_{er}$  est plus importante en  $\bar{\lambda}_c = 1$ . On voit aussi que cette érosion est d'autant moins importante que la colonne est plus élancée,  $\bar{\lambda}_c$  est plus grand. Si, par contre, on considère le voilement de la section du profil, on note que le palier des tronçons courts est redéfini afin de tenir compte du voilement de ses parois. L'écart  $b_{er}$  montre l'érosion que la charge de ruine subit à cause de l'interaction entre le voilement local et le flambement global. Egalement, on note que cette érosion est d'autant moins importante que la colonne est plus élancée. Ce fait peut être mieux compris à l'aide

de la figure 3.1 où on peut voir que plus longue est la colonne, plus petite est la contrainte critique de flambement global par rapport à la contrainte critique de voilement de la section. Donc, dans ce cas, le flambement global de la colonne tend à se produire avant que le voilement de la section puisse avoir lieu.

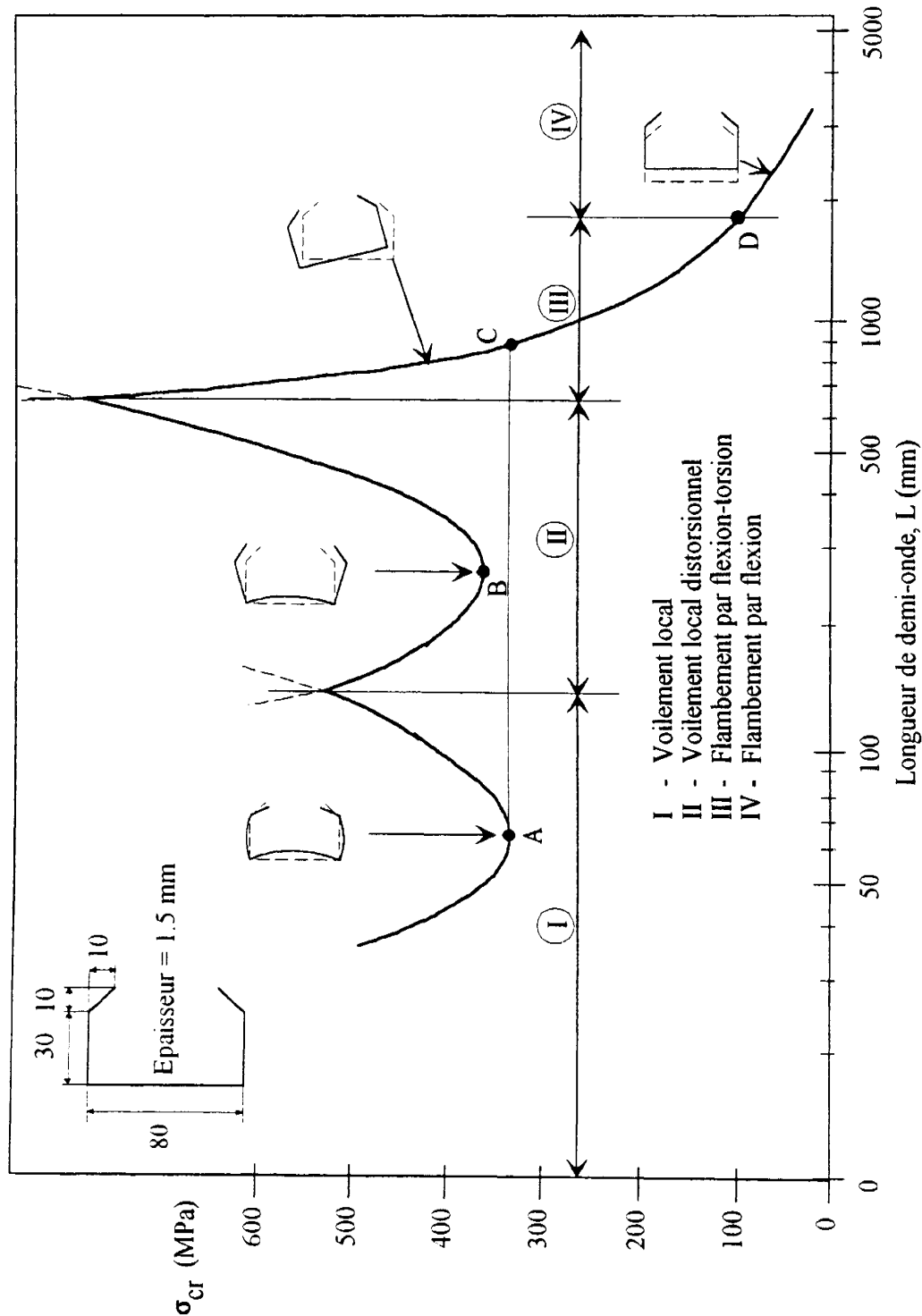


Figure 3.1- Variation de la contrainte critique de voilement de la section et de flambement global d'une colonne à section en C, sous compression uniforme, avec la longueur de demi-onde correspondante, obtenue au moyen de la méthode des bandes finies par HANCOCK [52].

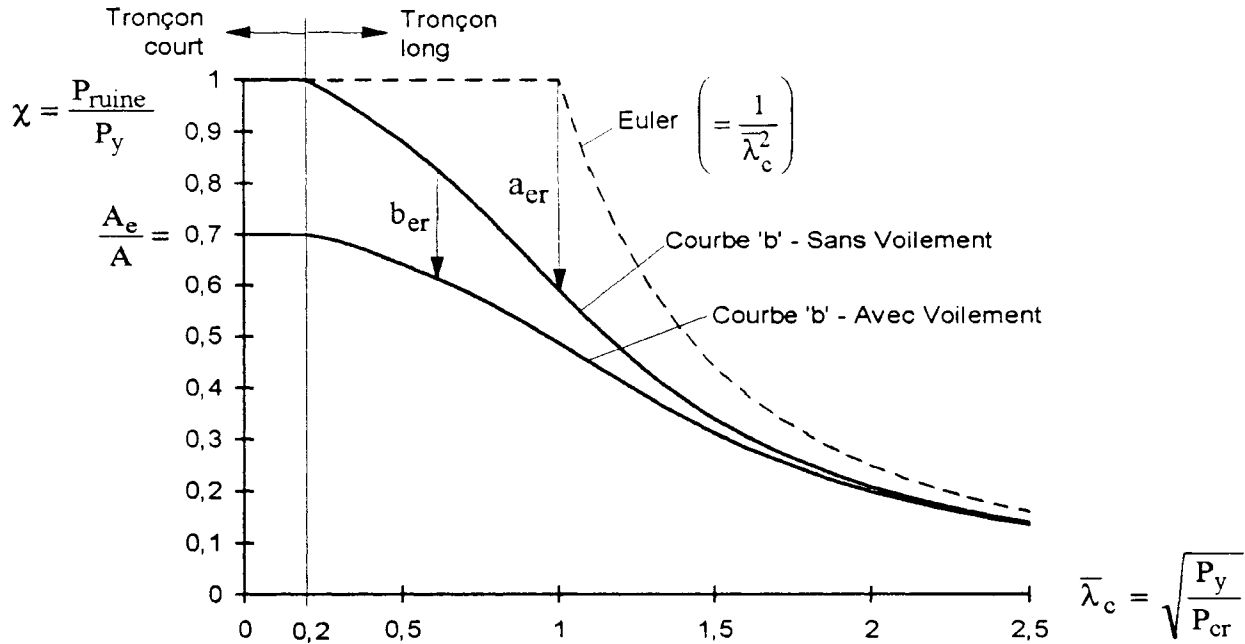


Figure 3.2- Visualisation de l'interaction entre le voilement local et le flambement global au moyen des courbes de flambement Européennes.

Afin de donner une idée du comportement réel d'une colonne en acier constituée d'un profil à parois minces, on présentera ici le comportement numérique obtenu par la méthode de l'élément fini de poutre spatiale avec prise en compte du voilement au moyen d'une section effective qui varie à chaque pas du processus de convergence du problème non-linéaire, et dont l'exposé théorique fait l'objet du prochain chapitre de cette thèse. La bonne concordance de charges de ruine obtenues numériquement et expérimentalement permet de conclure que le comportement numérique doit représenter avec une bonne précision le comportement réel de ces colonnes.

Pour cette présentation, on a choisi deux des colonnes en profil C essayées par MULLIGAN [33] avec des modes de flambement distincts; le profil CLC/3-120x60 - flambement par flexion et le profil CLC/1-90x90 - flambement par flexion-torsion. La discrétisation utilisée, les conditions d'appui et de chargement, les caractéristiques géométriques et mécaniques et la flèche initiale adoptée pour la simulation numérique sont donnés à la figure 3.3. Il est utile de remarquer que, pour les conditions d'appui en torsion, on considère que les plateaux de la presse d'essais sont infiniment rigides, donc ils jouent le rôle d'encastrement en torsion puisqu'ils imposent aux sections d'extrémité de rester planes, en empêchant ainsi tout déplacement de gauchissement. Pour le calcul en plasticité, le matériau est considéré élastique-parfaitement plastique (acier). Les largeurs effectives sont calculées selon l'Eurocode 3.

### III - L'interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilité

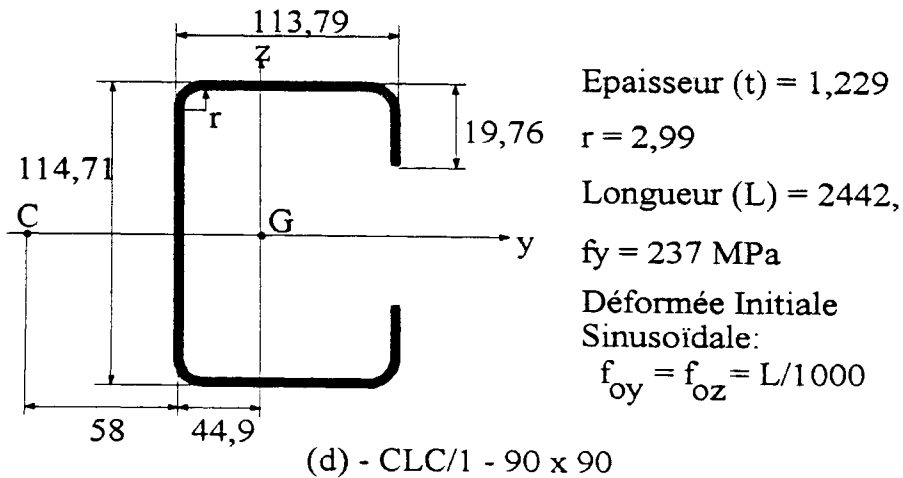
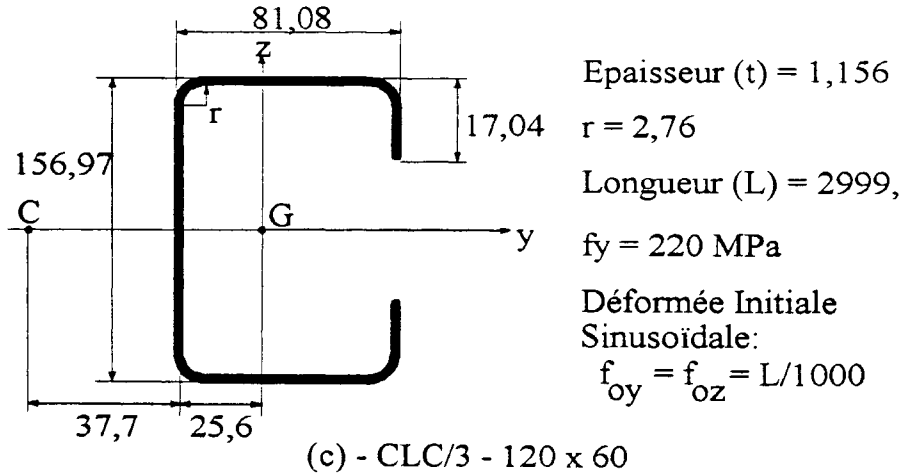
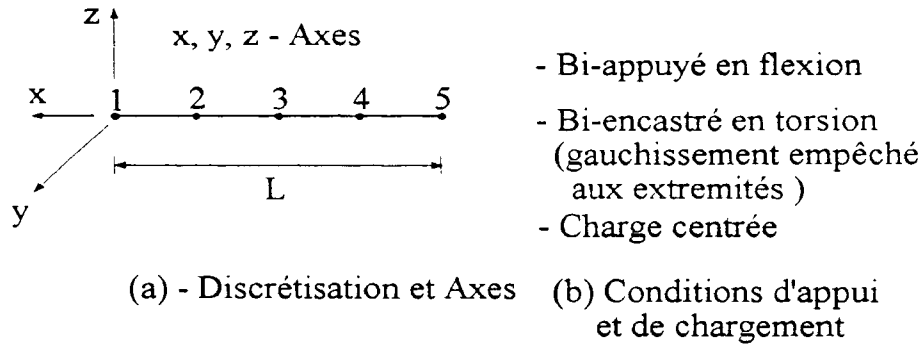


Figure 3.3- Caractéristiques générales des exemples numériques des profils essayés par MULLIGAN [33], dimensions en millimètres.

- (a) Discretisation et axes;
- (b) Conditions d'appui et de chargement;
- (c) Profil CLC/3-120x60;
- (d) Profil CLC/1-90x90.

Les figures 3.4 et 3.5 montrent les résultats numériques de charge appliquée x déplacement obtenus pour les profils CLC/3-120x60 et CLC/1-90x90, respectivement. Les valeurs de charge critique de flambement ( $P_{f,y}$  - par flexion dans le plan xy et  $P_{ft}$  - par flexion torsion) et les valeurs de charges de ruine expérimentales sont aussi données sur les deux figures mentionnées. Les courbes 'a' montrent le comportement numérique pour un matériau linéairement élastique. On note que quand le flambement est par flexion, figure 3.4, le chemin post-critique présente un caractère stable; alors que, quand le flambement est par flexion-torsion, figure 3.5, le chemin post-critique présente un caractère instable.

Si par contre, on considère le cas d'un matériau élasto-plastique, l'action combinée des contraintes de compression et de flexion, figure 3.4, et de gauchissement, figure 3.5, conduit à un début de plastification de la section (point P de la courbe 'b'). A partir de ce point la colonne perd une bonne partie de sa rigidité jusqu'à l'atteinte de l'état limite ultime défini par le point L.

Les courbes 'c' représentent le cas où le voilement des parois est pris en compte au moyen du concept des largeurs effectives qui sont, comme déjà dit, calculées selon l'Eurocode 3. On remarque que le début du voilement (point V) précède le processus de plastification (point P de la courbe 'c') et que le voilement des parois entraîne une perte tellement accentuée de rigidité que la plastification a lieu quand la courbe est déjà très aplatie. Ce fait est d'autant plus prononcé que la section transversale est plus élancée, ce qui se traduit par une valeur de l'élancement réduit de la section, défini par  $\bar{\lambda}_s = (f_y / \sigma_{cr,s})^{1/2}$ , plus grand. Ainsi, la plastification peut se produire, soit avant la ruine (le sommet de la courbe), soit après la ruine.

Le premier cas, plastification avant la ruine, est très compréhensible si on fait appel à l'hypothèse de von KARMAN, selon laquelle la ruine de plaques est atteinte par le début de la plastification, comme déjà montré au paragraphe 2.2.2. En effet, la ruine par l'atteinte de plastification de l'une des plaques composant le profil et le développement subséquent du mécanisme plastique de ruine de cette plaque conduit à la formation d'une rotule plastique dans la colonne; autrement dit, l'état limite ultime est atteint par la transformation de la colonne en un mécanisme. En plus, pour des raisons qu'on vient de voir, la réserve de résistance post-plastique reste toujours très faible; de manière que, dans ce cas, le début de plastification constitue pratiquement la ruine de la colonne.

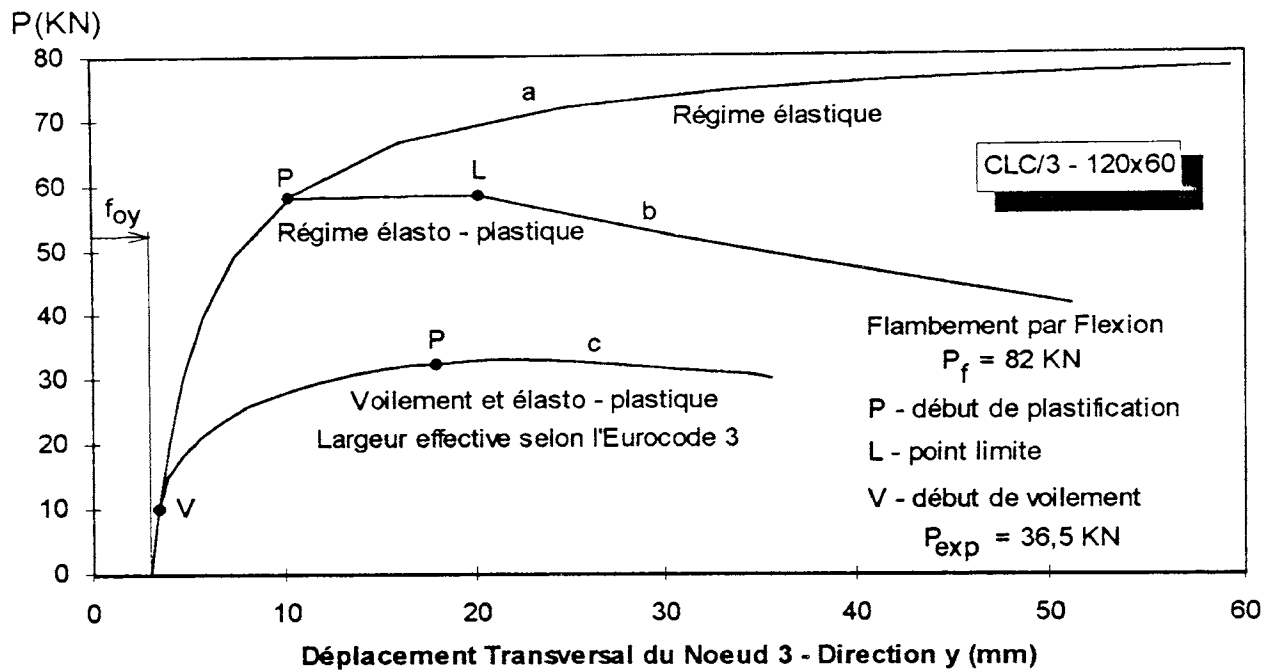


Figure 3.4- Courbes numériques de charge x déplacement du profil CLC/3-120x60, obtenues par la méthode des éléments finis.

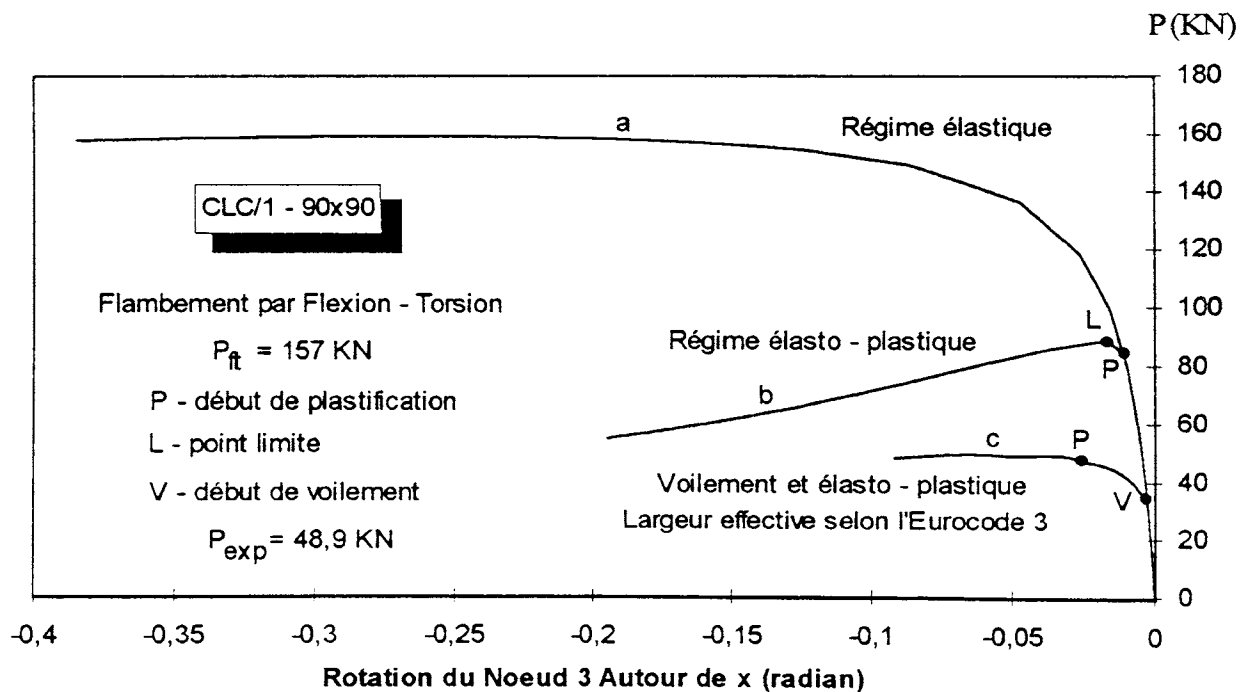


Figure 3.5- Courbes numériques de charge x déplacement du profil CLC/1-90x90, obtenues par la méthode des éléments finis.



Au contraire, quand la plastification a lieu après le sommet de la courbe, on a une ruine qui se produit avec la colonne travaillant encore en régime élastique. Ce phénomène s'explique par l'effet de l'interaction entre le voilement local des parois et le flambement global de la colonne. Ce type de comportement peut se produire quand le flambement par flexion est celui qui gouverne, mais il se produit très souvent lorsque le flambement est par flexion-torsion. Il en est ainsi, par exemple, pour le cas des cornières dont le mode d'instabilité est par flexion-torsion qui, comme déjà vu au paragraphe 2.4.2, possèdent une charge critique de flambement par torsion (qui, pour les cornières, est très voisine de la charge critique de flambement par flexion-torsion) très proche de la charge critique de voilement de ses parois. Donc, quand le voilement commence à se produire, la cornière est déjà proche du flambement par flexion-torsion, qui, d'ailleurs, possède un comportement post-critique instable. Par voie de conséquence, la ruine se passe en régime élastique si la limite élastique est plus élevée que la contrainte critique de flambement par flexion-torsion. Pour des colonnes constituées par des profils formés par d'autres types de sections transversales, comme les sections en U et en C, ce type d'interaction entre le voilement et le flambement par flexion-torsion n'est pas aussi prononcé que dans le cas de la cornière, mais il peut rester valable dans une mesure moins importante.

### **3.2. LES METHODES DE CALCUL DE COLONNES CONSTITUEES PAR DES PROFILS A PAROIS MINCES**

A l'heure actuelle, on peut distinguer dans la littérature quatre types différents de méthodes de calcul de colonnes pour la prise en compte de l'interaction des modes d'instabilité locaux et globaux. BATISTA, dans sa thèse de doctorat [50], donne un aperçu très complet des recherches actuelles dans ce domaine et il les classe comme suit selon la nature de l'approche suivie:

- a) Méthodes analytiques;
- b) Méthodes semi-analytiques;
- c) Méthodes semi-empiriques;
- d) Méthodes numériques.

Les méthodes analytiques sont sans doute les plus précises et les plus exactes. Ce sont des méthodes qui comprennent des développements analytiques très longs et très sophistiqués, ce qui les rend impraticable d'utilisation dans la pratique journalière des bureaux d'étude. Les recherches dans ce domaine ne sont pas très nombreuses et, en général, leur domaine d'application reste limité à des cas particuliers.

Dans le cadre de cette thèse, on peut dire que ce sont les méthodes semi-analytiques qui nous intéressent le plus. La modélisation du voilement et de ses effets est réalisée à l'aide du concept de largeur effective de plaque. Le comportement non-linéaire de la colonne est pris en compte par les équations classiques de la mécanique des structures et

l'interaction entre le voilement et la flexion de la colonne est traitée à l'aide d'un algorithme numérique de résolution pas-à-pas du problème non linéaire. Il revient à KLOPPEL et SCHUBERT [62] d'avoir été les précurseurs de ce type d'analyse. Cependant, leur travail est consacré aux caissons des ponts à sections rectangulaires ou carrées. A la suite de KLOPPEL et SCHUBERT, d'autres recherches se sont succédées dans ce domaine, comme celles de SKALLOUD et NAPRSTEK [63], THOMASSON [30], MULLIGAN [33] et BATISTA [64]. Le tableau 3.1 donne un aperçu général du domaine d'application, de la formulation théorique et de la solution numérique adoptées par chacun des chercheurs précités.

L'analyse de ce tableau montre que le domaine d'application de ces recherches se limite au cas de colonnes constituées par des profils à section fermée doublement symétrique (profils creux à section rectangulaire ou carrée) et à section ouverte à un axe de symétrie (profil C seulement). Le seul mode d'instabilité global considéré est celui de flexion, en l'absence du mode torsionnel. Aussi, ils ne s'appliquent qu'au cas de colonnes isolées et bi-articulées aux extrémités. Malgré ces limitations, cette méthode donne de très bons résultats dans les cas où elle s'applique; et est, pour ainsi dire, à la base de l'idée de l'introduction de la section effective dans l'élément fini de poutre spatiale, développée dans cette thèse au prochain chapitre.

Quant aux méthodes semi-empiriques, elles utilisent plutôt, pour le dimensionnement pratique des éléments à parois minces, des courbes de flambement modifiées. On reviendra plus tard sur cette classe de méthode dans le dernier paragraphe de ce chapitre lors d'une revue des codes actuels pour le calcul à l'état limite ultime de ce type de structure.

Les méthodes numériques sont de loin l'outil le plus puissant pour l'analyse du comportement de colonnes en profils à parois minces. Dans cette catégorie on peut mettre en évidence la méthode des éléments finis de coque et la méthode des bandes finies. Cependant, ce qui représente un avantage de la méthode des éléments finis de coque, l'analyse de structures formées par éléments à parois minces, constitue un désavantage de la méthode de bandes finies, l'analyse d'un seul élément prismatique isolé. D'un côté, l'avantage inhérent à la méthode des bandes finies, le temps de calcul par ordinateur plus économique, est au contraire une très grande désavantage de la méthode des éléments finis de coque en raison du coût prohibitif de ce type de calcul. Ces remarques faites permettent de conclure que malgré la puissance des méthodes numériques reprises ci-dessus, leur utilisation dans les cas pratiques reste toujours très limitée.

Auteur	Kloppel et Schubert [62]	Skaloud et Naprstek [63]	Thomasson [30]	Mulligan [33]	Batista [64]
Type de section	Caissons de ponts	Profil creux	Profil C		
Condition d'appui	Bi-appuyée				
Condition de chargement	Charge de compression centrée et excentrée				
Prise en compte de la déformée initiale	Non	Oui	Non		
Mode de flambement	Flexion autour de l'axe fort	Flexion autour de l'axe faible			
Section effective le long de la pièce	Constante	Variable		Constante	
Formulation théorique	Equations classiques de la mécanique des structures	Equation différentielle d'équilibre d'une poutre colonne	Combinaison des équations classiques de la mécanique des structures et de l'équation différentielle d'équilibre d'une poutre colonne	Equations classiques de la mécanique des structures	
Solution numérique	Algorithme itératif	Combinaison des approximation successive et de la méthode de Runge-Kuta	Algorithme incrémentiel itératif		Méthode de Newton Raphson

Tableau 3.1- Aperçu général des recherches dans le cadre des méthodes semi-analytiques.

Dans le cadre des méthodes numériques, BATISTA et ALMEIDA ont récemment publié un article sur le calcul de structures planes formées de profils à section en C à parois minces [65]. Ils utilisent l'élément fini non linéaire classique de poutre dans le plan. La modélisation du voilement est réalisée au moyen de largeurs effectives. On arrive à introduire la variation de la section effective à chaque pas de la solution du problème non linéaire à l'aide d'une méthode hybride proposée par BATISTA, qui consiste en une combinaison de la méthode incrémentielle itérative non linéaire de Newton-Raphson et de la méthode directe (sécante). Un aperçu de l'élément fini non linéaire de poutre dans le

plan et une présentation des deux méthodes précitées sont donnés dans la référence [66]. Plus récemment BATISTA a fait une étude comparative de charges de ruine obtenues par son programme et celles obtenues par les codes actuels des continents Américain et Européen [67], pour des treillis plans constitués de profils à section en C. Bien que son travail représente une avancée dans le cadre du calcul de structures en éléments minces par élément fini de poutre, son utilisation reste encore limitée au cas de structures planes formées uniquement par des profils à section en C, en l'absence du mode torsionnel.

### **3.3. LES MODES GLOBAUX D'INSTABILITE**

#### **3.3.1. Introduction**

Les colonnes constituées par des profils à section ouverte et parois minces possèdent une très faible raideur torsionnelle, ce qui conduit souvent à considérer un mode de flambement supplémentaire à celui de la flexion d'Euler; c'est à dire, le flambement par torsion. VLASSOV [68] a montré que l'hypothèse de Bernoulli de conservation de la section plane n'est plus valable lorsque le rapport largeur-épaisseur ( $b/t$ ) excède 10, approximativement. Ainsi, la pièce présente des déformations longitudinales non seulement par suite de la flexion, mais aussi par suite du gauchissement dû à la torsion.

En fait, la théorie d'Euler du flambement dans le plan, basée sur la loi des sections planes et ne tenant compte que des états d'équilibre à la flexion, ne représente qu'un cas très particulier de la théorie générale de VLASSOV. La combinaison des modes fondamentaux d'instabilité de flexion autour des axes principaux d'inertie et de torsion autour du centre de torsion conduit à une charge critique qui est toujours plus petite que celles obtenues pour chaque mode d'instabilité fondamental considéré isolément.

#### **3.3.2. Stabilité de colonnes**

Afin de procéder au calcul de la stabilité d'une colonne avec section transversale quelconque et sollicitée par une charge de compression excentrée, comme illustré à la figure 3.6, on considère le critère énergétique d'équilibre indifférent donné par la condition:

$$\delta^2 \pi = \min \text{imum} = 0 \quad (3.1)$$

avec:

$$\pi = U + V \quad (3.2)$$

où  $\pi$  est l'énergie potentielle totale et,  $U$  et  $V$  sont l'énergie de déformation et l'énergie potentielle des forces extérieures, respectivement.

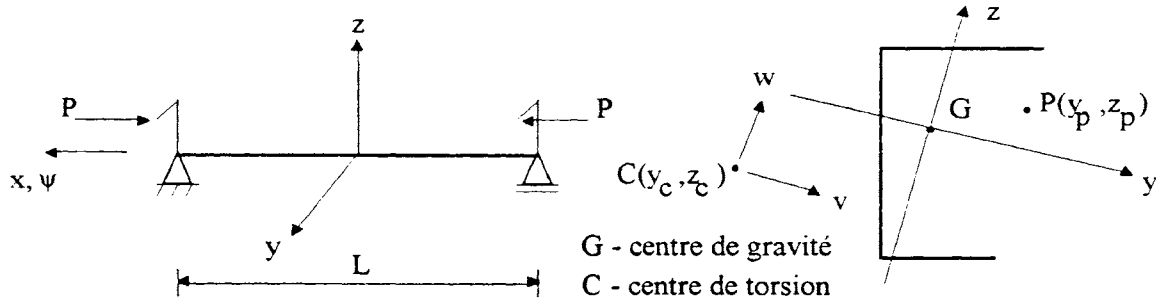


Figure 3.6- Colonne à section transversale quelconque soumise à la compression excentrée.

Si on considère les trois variables du problème, soient les déplacements  $v$  et  $w$  et la rotation  $\psi$ , comme indiqué à la figure 3.6, la condition de minimum (3.1) exige l'annulation des trois variations de  $\delta^2\pi$  par rapport à  $v$ ,  $w$  et  $\psi$ :

$$\delta_v(\delta^2\pi) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\delta_w(\delta^2\pi) = 0 \quad (3.3b)$$

$$\delta_\psi(\delta^2\pi) = 0 \quad (3.3c)$$

L'application des conditions (3.3) au système de la colonne de la figure 3.6 aboutit au système d'équations d'équilibre suivant [7,68]:

$$EI_z v^{iv} + P v'' + P(z_c - z_p) \psi'' = 0 \quad (3.4a)$$

$$EI_y w^{iv} + P w'' - P(y_c - y_p) \psi'' = 0 \quad (3.4b)$$

$$GC_T \psi'' - EI_\omega \psi^{iv} - Pr_o^2 \psi'' - P y_p \beta_y \psi'' - P z_p \beta_z \psi'' - P(y_p - y_c) w'' + P(z_p - z_c) v'' = 0 \quad (3.4c)$$

Les variables intervenant dans ces expressions ont les définitions suivantes:

$( )'$ : dérivée par rapport à  $x$ ;

$E$ : module d'élasticité du matériau;

$G$ : module d'élasticité transversal du matériau;

$P$ : charge de compression appliquée;

$(y_c, z_c)$ : coordonnées du centre de torsion par rapport aux axes principaux d'inertie;

$(y_p, z_p)$ : coordonnées du point d'application de la charge de compression par rapport aux axes principaux d'inertie;

### III - L'interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilité

A: aire;

$I_y$  et  $I_z$ : moments d'inertie en flexion par rapport aux axes principaux d'inertie, donnés par les expressions suivantes:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad , \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (3.5)$$

$C_T$ : inertie en torsion de Saint Venant;

$I_\omega$ : inertie de gauchissement;

$r_o$ : rayon d'inertie polaire par rapport au centre de torsion, dont le carré est donné par:

$$r_o^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + z_c^2 + y_c^2 \quad (3.6)$$

$\beta_y$  et  $\beta_z$ : caractéristiques géométriques données par les expressions suivantes:

$$\beta_y = \frac{I_{yz}}{I_z} - 2y_c \quad , \quad \beta_z = \frac{I_{yz}}{I_y} - 2z_c \quad (3.7)$$

où:

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad , \quad I_{yz} = \int_A yz dA \quad , \quad r^2 = y^2 + z^2 \quad (3.8)$$

Afin de résoudre le système d'équations (3.4), on peut adopter des fonctions satisfaisant les conditions d'appui pour les déplacements de telle façon que:

$$v = A_v f_v(x) \quad (3.9a)$$

$$w = A_w f_w(x) \quad (3.9b)$$

$$\psi = A_\psi f_\psi(x) \quad (3.9c)$$

où  $f_v$ ,  $f_w$  et  $f_\psi$  sont des fonctions propres du problème de stabilité et  $A_v$ ,  $A_w$  et  $A_\psi$  sont les amplitudes de ces fonctions.

La substitution des expressions (3.9) dans le système d'équations différentielles (3.4) conduit à l'équation matricielle suivante:

$$[D]_{3 \times 3} \{A\}_{3 \times 1} = \{0\}_{3 \times 1} \quad (3.10)$$

où  $[D]$  est la matrice résultante de la différentiation des fonctions propres (3.9) et

$$\{A\} = \langle A_v, A_w, A_\psi \rangle^T.$$

Afin de que le système d'équations (3.10) donne des solutions non triviales, c'est à dire  $\{A\} \neq \{0\}$ , on doit avoir l'annulation du déterminant de la matrice  $[D]$ , d'où:

$$|D| = 0 \quad (3.11)$$

où  $|D|$  représente le déterminant de la matrice  $[D]$ . Les racines  $P$  de l'équation (3.11) sont les valeurs propres associées aux fonctions propres (3.9) du problème de stabilité de la colonne. La racine la plus petite correspond à la charge critique d'instabilité globale de la colonne.

Dans le cadre de cette thèse, il nous intéresse de connaître les valeurs de charge critique  $P_{cr}$  pour deux types de conditions d'appui aux extrémités de la colonne:

- a) Condition d'appui I: bi-articulée en flexion et en torsion (gauchissement libre aux extrémités), donnée par:

$$v = w = \psi = 0 \quad \text{et} \quad v'' = w'' = \psi'' = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = L \quad (3.12)$$

ce qui permet d'utiliser les fonctions trigonométriques suivantes pour les fonctions propres (3.9):

$$f_v = f_w = f_\psi = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.13)$$

- b) Condition d'appui II: bi-articulée en flexion et bi-encastree en torsion (gauchissement empêché aux extrémités), donnée par:

$$v = w = \psi = 0 \quad \text{et} \quad v'' = w'' = \psi' = 0 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = L \quad (3.14)$$

ce qui permet d'utiliser les fonctions trigonométriques suivantes pour les fonctions propres (3.9):

$$f_v = f_w = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.15a)$$

$$f_\psi = 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \quad (3.15b)$$

Pour la condition I (gauchissement libre aux extrémités) l'utilisation des fonctions (3.13) donne pour l'équation (3.11) un polynôme du troisième degré en  $P$  dont les trois racines sont réelles car la matrice  $[D]$  est symétrique. En ce qui concerne la condition II (gauchissement empêché aux extrémités) l'utilisation des fonctions (3.15) conduit à une équation transcendante très compliquée pour l'équation (3.11) dont la solution exacte s'avère mathématiquement très difficile. Afin de contourner ce problème, VLASSOV [68] recourt à une méthode approximative. Il choisit pour les fonctions propres (3.9) les fonctions fondamentales de vibrations transversales d'une poutre. Comme ces fonctions ne sont pas de solutions des équations (3.4), on ne peut pas obtenir la nullité de ces équations. Pour y arriver il les annule sous la forme intégrée, en utilisant la méthode de Bubnov et Galerkin.

Plus récemment, l'utilisation de l'élément fini de poutre spatiale [69] par BATISTA [50] avec prise en compte du gauchissement, a donné des résultats plus simples que ceux de

VLASOV et relativement précis pour la prise en compte de l'empêchement du gauchissement aux sections d'extrémités lors du calcul de la charge critique.

Le tableau 3.2 présente les propositions de VLASOV et BATISTA pour la condition d'appui II, ainsi que les résultats classiques de la condition d'appui I. Les coefficients repris sur ce tableau interviennent dans l'équation (3.11), donnée ci-dessous sous une forme générale:

$$\begin{vmatrix} k_{11}P_{f,y} - P & 0 & -k_{13}P(z_c - z_p) \\ 0 & k_{22}P_{f,z} - P & k_{23}P(y_c - y_p) \\ -k_{31}P(z_c - z_p) & k_{32}P(y_c - y_p) & A_{rp}(P_t - P) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

avec:

$$A_{rp} = r_o^2 + y_p\beta_y + z_p\beta_z \quad (3.17)$$

$$P_{f,y} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (3.18)$$

$$P_{f,z} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (3.19)$$

$$P_t = \frac{GC_T + \frac{k_{33}\pi^2 EI_\omega}{L^2}}{A_{rp}} \quad (3.20)$$

où  $P_{f,y}$  et  $P_{f,z}$  sont les charges critiques classiques d'Euler de flambement par flexion dans les plans xy et xz, respectivement; et  $P_t$  est la charge critique de flambement par torsion de la colonne autour du centre de torsion. Il faut noter que  $P_t$  varie avec le point d'application de la charge ( $y_p, z_p$ ). En plus, on voit à l'aide de l'équation (3.16) qu'il y a un découplage complet entre la flexion selon les axes y et z et la torsion si la charge axiale est appliquée au centre de torsion.



	Condition d'appui I (gauchissement libre aux extrémités)	Condition d'appui II (gauchissement empêché aux extrémités)	
		VLASOV [68]	BATISTA [50]
$k_{11}$	1	1	1
$k_{22}$	1	1	1
$k_{33}$	1	4,1223	4
$k_{13} = k_{31}$	1	0,8834	1
$k_{23} = k_{32}$	1	0,8834	1

Tableau 3.2- Coefficients de l'équation (3.16) pour les conditions d'appui en question.

L'analyse du tableau 3.2 montre que, dans le cas du gauchissement empêché aux extrémités, la différence entre les valeurs des coefficients approchées obtenues par VLASSOV et celles proposées par BATISTA n'est pas très importante. Des calculs effectués par ce dernier montrent que les différences entre les valeurs de charge critique obtenues par sa proposition et celles obtenues par l'élément fini de poutre spatiale sont non significatives. Donc, dans cette thèse on a préféré utiliser la proposition de BATISTA pour le calcul de la charge critique de colonnes lorsque le gauchissement est empêché aux extrémités. En résumé on a:

$$k_{11} = k_{22} = k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = 1 \quad (3.21a)$$

$$k_{33} = 1 \text{ si gauchissement libre aux extrémités} \quad (3.21b)$$

$$k_{33} = 4 \text{ si gauchissement empêché aux extrémités} \quad (3.21c)$$

Finalement, en appelant  $f_{(P)}$  le déterminant de l'équation (3.16) avec les relations (3.21), son développement conduit au polynôme du troisième degré suivant:

$$f_{(P)} = (P_{f,y} - P)(P_{f,z} - P)A_{rp}(P_t - P) - P^2(P_{f,z} - P)(z_c - z_p)^2 - P^2(P_{f,y} - P)(y_c - y_p)^2 = 0 \quad (3.22)$$

Le développement de cette expression conduit à la forme suivante:

$$f_{(P)} = A_1 P^3 + A_2 P^2 + A_3 P + A_4 = 0 \quad (3.23)$$

avec:

$$A_1 = -A_{rp} + (z_c - z_p)^2 + (y_c - y_p)^2 \quad (3.24a)$$

$$A_2 = A_{rp}(P_t + P_{f,y} + P_{f,z}) - P_{f,z}(z_c - z_p)^2 - P_{f,y}(y_c - y_p)^2 \quad (3.24b)$$

$$A_3 = -A_{rp}P_t(P_{f,y} + P_{f,z}) - A_{rp}P_{f,y}P_{f,z} \quad (3.24c)$$

$$A_4 = A_{rp}P_tP_{f,y}P_{f,z} \quad (3.24d)$$

Dans les développements qui suivent, le but est d'analyser le comportement des racines de (3.22) ou (3.23). Afin d'y arriver, on passera par les définitions de courbe isostable et de cercle de stabilité.

Si on pose  $P = P_0 = \text{cte}$  avec  $P_0 \neq P_{f,y}, P_{f,z}$  et  $P_t$ , et en divisant l'équation (3.22) par :

$$P_0^2 (P_{f,y} - P_0)(P_{f,z} - P_0)(P_t - P_0) \quad (3.25)$$

on obtient :

$$\frac{A_{rp}}{P_0^2} - \frac{(z_c - z_p)^2}{(P_{f,y} - P_0)(P_t - P_0)} - \frac{(y_c - y_p)^2}{(P_{f,z} - P_0)(P_t - P_0)} = 0 \quad (3.26)$$

Cette équation détermine dans le plan de la section transversale une courbe possédant la propriété que les charges critiques appliquées en ses points ont une valeur constante  $P = P_0$ . Pour cette raison, on appelle la courbe ainsi définie, pour  $P_0 = \text{cte}$  et,  $y_p$  et  $z_p$  variables, la courbe isostable des forces critiques excentrées. En plus, si  $P_0$  est la plus petite des trois racines de (3.22), on peut prouver, comme on verra plus loin, que  $P_0$  est plus petit que  $P_{f,y}, P_{f,z}$  et  $P_t$ . Egalement, on peut démontrer que la courbe isostable est une ellipse (voir VLASSOV [68]) si  $P_0$  est la plus petite des racines.

Le flambement par flexion-torsion qu'on étudie ici dans le cas d'une charge  $P$  de compression (positive), est également possible dans le cas d'une traction excentrée ( $P$  négatif). Physiquement, ce phénomène s'explique par le fait qu'à l'application d'une force longitudinale excentrée de traction, il peut se créer dans la section transversale de la colonne, non seulement des contraintes normales de traction, mais aussi celles de compression. Il est évident que cette perte de stabilité à la traction excentrée n'est pas possible pour toute position de la force de traction dans le plan de la section. Si, par exemple, cette force est appliquée à l'intérieur du noyau central de la section, toute la section n'est soumise qu'à des contraintes de traction. Dans ce cas la colonne ne peut pas perdre sa stabilité à la suite d'une traction excentrée. On peut donc conclure que le noyau central doit alors se trouver à l'intérieur d'une certaine région de stabilité de la section transversale de la colonne soumise à une traction excentrée. On peut se demander si cette région de stabilité est limitée au noyau central ou si elle le dépasse; autrement dit, la perte de stabilité, est-elle possible lorsqu'une force longitudinale de traction d'une valeur finie est appliquée à l'extérieur du noyau central de sorte qu'à l'extrémité opposée de la section prennent déjà naissance des contraintes de compression? On peut élucider cette question à l'aide de l'équation (3.26) qui détermine la courbe des forces critiques constantes en fonction des excentricités  $y_p$  et  $z_p$ .

La région de stabilité d'une section transversale d'une colonne soumise à une traction excentrée se caractérise par le fait que la force critique de traction tend vers une valeur

infinie lorsque son point d'application s'approche de cette région par son côté extérieur. En réécrivant l'équation (3.26) sous la forme suivante:

$$A_{rp} - \frac{(z_c - z_p)^2}{\left(\frac{P_{f,y}}{P_o} - 1\right)\left(\frac{P_t}{P_o} - 1\right)} - \frac{(y_c - y_p)^2}{\left(\frac{P_{f,z}}{P_o} - 1\right)\left(\frac{P_t}{P_o} - 1\right)} = 0 \quad (3.27)$$

et en faisant dans cette équation  $P_o \rightarrow \infty$ , on obtient l'équation de la courbe qui délimite cette région, donnée par:

$$A_{rp} - (z_c - z_p)^2 - (y_c - y_p)^2 = 0 \quad (3.28)$$

L'analyse de cette équation montre qu'elle représente un cercle, dont les coordonnées  $(C_y, C_z)$  de son centre et son rayon  $R_c$  peuvent être calculés en égalant son expression (3.28) à l'équation générale du cercle suivante:

$$(z_p - C_z)^2 + (y_p - C_y)^2 = R_c^2 \quad (3.29)$$

à partir de laquelle on trouve:

$$C_y = \frac{I_{yr2}}{2I_z} \quad (3.30)$$

$$C_z = \frac{I_{zr2}}{2I_y} \quad (3.31)$$

$$R_c^2 = C_y^2 + C_z^2 + \frac{I_y + I_z}{A} \quad (3.32)$$

Donc, la perte de stabilité d'une colonne par une force de traction excentrée ne peut avoir lieu que si cette force est appliquée en dehors de la région de stabilité; cette région est limitée par un cercle indépendamment de la forme de la section transversale de la colonne.

Il est utile de remarquer l'égalité de l'équation du cercle de stabilité (3.28) et du coefficient  $A_1$  du terme cubique du polynôme de l'équation (3.23). Ce fait combiné au raisonnement logique pour la déduction du cercle de stabilité permet de conclure que dans un voisinage du cercle de stabilité, lorsque le point d'application de la charge tend vers celui-ci de son côté extérieur, le polynôme (3.23) possède deux racines positives (compression) et une racine négative (traction) qui tend vers  $-\infty$ . Si la charge se trouve appliquée sur le cercle de stabilité, le polynôme (3.23) devient une parabole et il ne possède que deux racines positives. Quand la charge est appliquée à l'intérieur du cercle de stabilité, toutes les trois racines sont positives.

### III - L'interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilité

L'analyse plus approfondie des racines de (3.22) ou (3.23) peut se faire par l'analyse des changements de signe de ces équations avec la variation de  $P$ . A l'aide de ces équations, de la notion du cercle de stabilité et en supposant que l'axe  $y$  est l'axe fort d'inertie, on peut faire l'analyse de signes suivante:

Supposons que:  $P_{f,y} < P_{f,z}$

Pour  $P = 0$  en (équ. 3.23)  $\Rightarrow f_{(P)} = A_{rp} P_t P_{f,y} P_{f,z} > 0$

Pour  $P = P_{f,y}$  en (équ. 3.22)  $\Rightarrow f_{(P)} = -P_{f,y}^2 (P_{f,z} - P_{f,y})(z_c - z_p)^2 < 0$

Pour  $P = P_{f,z}$  en (équ. 3.22)  $\Rightarrow f_{(P)} = -P_{f,z}^2 (P_{f,y} - P_{f,z})(y_c - y_p)^2 > 0$

Pour  $P \rightarrow +\infty$  en (équ. 3.23)  $\Rightarrow f_{(P)} \rightarrow \left[ -A_{rp} + (z_c - z_p)^2 + (y_c - y_p)^2 \right] P^3 = A_1 P^3$

a) Si  $(y_p, z_p)$  est dans le cercle de stabilité  $\Rightarrow f_{(P)} < 0$

b) Si  $(y_p, z_p)$  est sur le cercle de stabilité  $\Rightarrow f_{(P)} \rightarrow A_2 P^2 > 0$  (à voir)

c) Si  $(y_p, z_p)$  est hors du cercle de stabilité  $\Rightarrow f_{(P)} > 0$

Pour  $P \rightarrow -\infty$  en (équ. 3.23)  $\Rightarrow f_{(P)} \rightarrow -A_1 |P|^3$

a) Si  $(y_p, z_p)$  est dans le cercle de stabilité  $\Rightarrow f_{(P)} > 0$

b) Si  $(y_p, z_p)$  est sur le cercle de stabilité  $\Rightarrow f_{(P)} \rightarrow A_2 P^2 > 0$  (à voir)

c) Si  $(y_p, z_p)$  est hors du cercle de stabilité  $\Rightarrow f_{(P)} < 0$

Il reste prouver que  $A_2 > 0$  lorsque  $(y_p, z_p)$  appartient au cercle de stabilité. Cette démonstration est très aisée. Il suffit de développer l'expression (3.24b) de  $A_2$  en retenant le fait que  $(y_p, z_p)$  doit satisfaire l'équation (3.28).

Afin de compléter cette analyse, on peut encore envisager deux situations extrêmes pour la valeur de  $P_t$  par rapport à  $P_{f,y}$  et  $P_{f,z}$ :

Si  $P_t < P_{f,y} < P_{f,z}$  en (équ. 3.22)  $\Rightarrow f_{(P_t)} < 0$

Si  $P_{f,y} < P_{f,z} < P_t$  en (équ. 3.22)  $\Rightarrow f_{(P_t)} > 0$

La figure 3.7 montre, sous la forme d'une représentation graphique, un résumé de l'analyse qu'on vient de voir. Les deux situations extrêmes de la valeur de  $P_t$  sont aussi illustrées sur cette figure. Pour les trois cas montrés, on voit que la plus petite racine positive (charge critique de compression) est plus petite ou égale aux valeurs critiques des modes d'instabilité fondamentaux:  $P_{f,y}$ ,  $P_{f,z}$  et  $P_t$ .

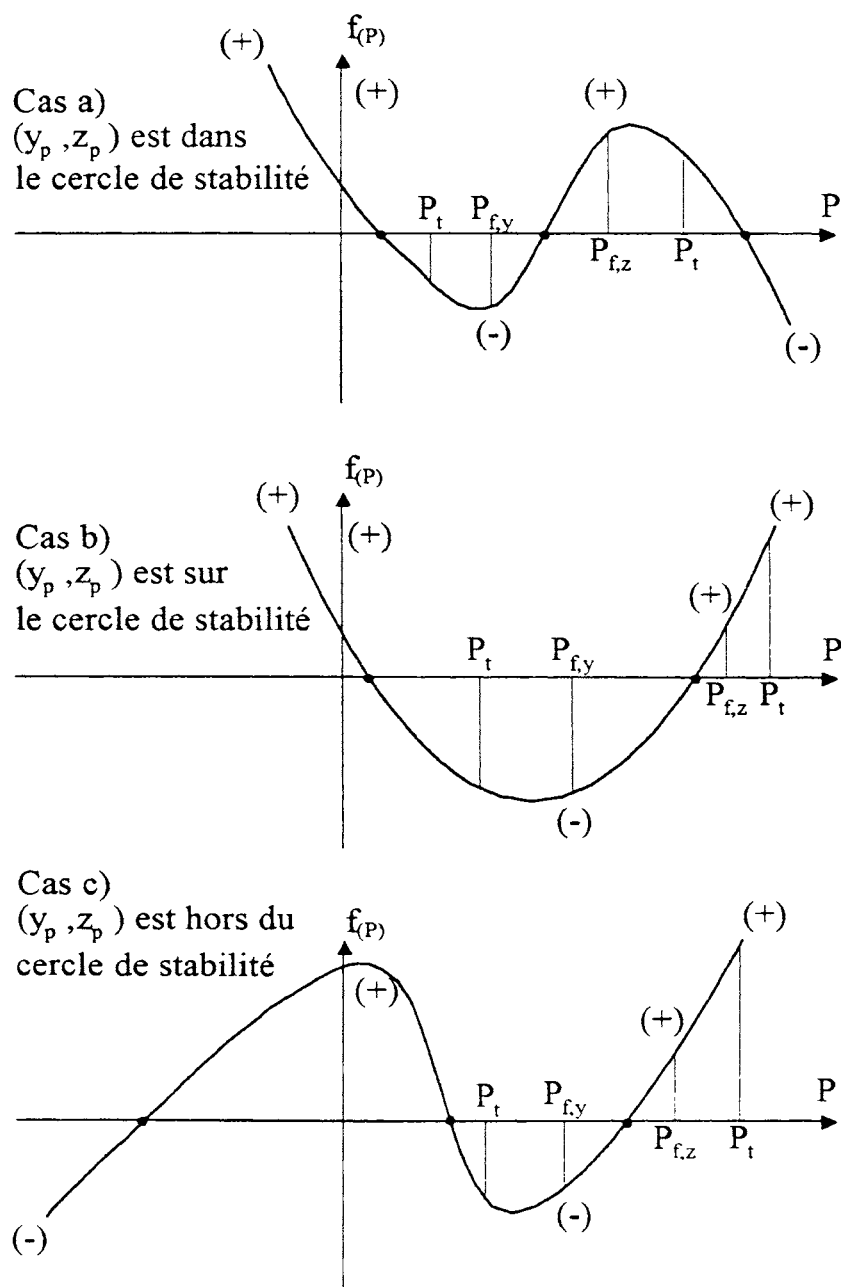


Figure 3.7- Représentation graphique de l'analyse de signes des équations (3.22) ou (3.23).

### 3.3.2.1. Cas particulier: section à un axe de symétrie avec charge appliquée sur cet axe

Dans ce cas particulier où on considère que 'y' est l'axe de symétrie de la section, de manière que  $z_c = 0$  et avec le point d'application de la force se situant sur cet axe,  $y_p \neq 0$  et  $z_p = 0$ , voir figure 3.8, l'analyse du déterminant de l'équation (3.16) montre qu'il y a découplage entre le flambement par flexion dans le plan xy et celui par torsion autour du centre de torsion en interaction avec la flexion dans le plan xz.

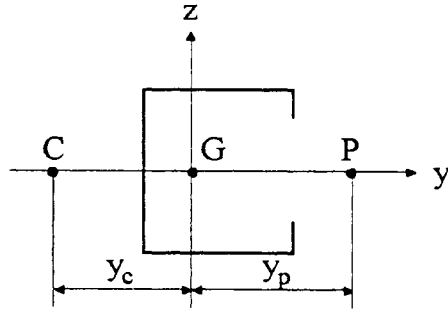


Figure 3.8- Orientation des axes d'une section à un axe de symétrie.

Donc, le développement du déterminant de l'équation (3.16) peut être scindé en deux parties:

$$P_{f,y} - P = 0 \quad (3.33)$$

$$\Omega P^2 - (P_{f,z} + P_t)P + P_{f,z}P_t = 0 \quad (3.34)$$

où:

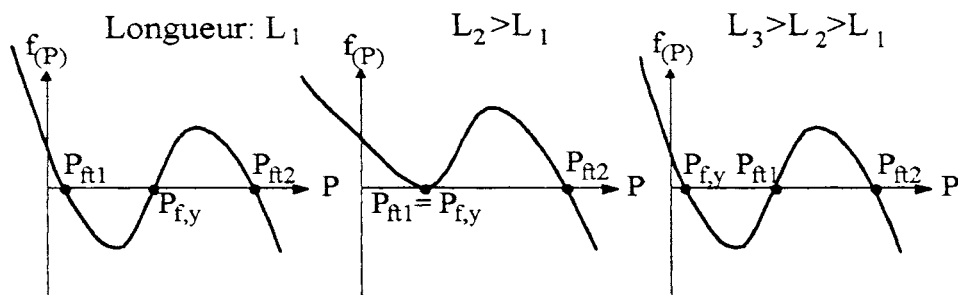
$$\Omega = 1 - \frac{(y_c - y_p)^2}{A_{rp}} \quad (3.35)$$

Les racines des équations (3.33) et (3.34) sont  $P_{f,y}$  et  $(P_{f1}, P_{f2})$ , respectivement. Par convention,  $P_{f1}$  est la plus petite racine positive de (3.34). Dans le cas où le point d'application de la charge se situe hors du cercle de stabilité de la section,  $P_{f1}$  est la seule racine positive et  $P_{f2}$  est la racine négative.

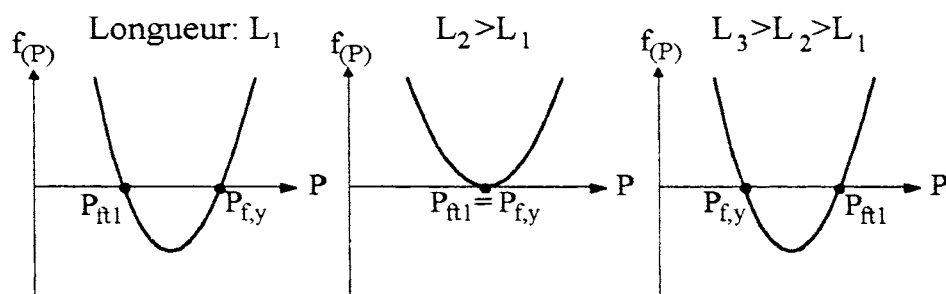
En effet, la plus petite racine entre  $P_{f,y}$  et  $P_{f1}$  est la charge critique de la colonne sollicitée par un effort normal de compression. Cette charge critique et le mode d'instabilité correspondant dépendent évidemment, pour une section donnée, des excentricités de la charge appliquée et de la longueur de la colonne. La figure 3.9 donne l'allure générale du polynôme  $f(p)$  avec la variation de la longueur de la colonne et avec la position relative du point d'application de la charge ( $y_p, z_p = 0$ ) par rapport au cercle de

stabilité de la section. On note que, pour des colonnes courtes (longueur  $L_1$ ), le mode critique est celui de flambement par flexion-torsion; pour des colonnes à longueur modérée ( $L_2$ ), les charges critiques par flexion-torsion et par flexion selon l'axe faible se confondent ( $P_{f,y} = P_{ft1}$ ); pour des longueurs plus longues (longueur  $L_3$ ), le mode critique est celui de flexion autour de l'axe faible.

Cas a) ( $y_p, z_p=0$ ) est dans le cercle de stabilité



Cas b) ( $y_p, z_p=0$ ) est sur le cercle de stabilité



Cas c) ( $y_p, z_p=0$ ) est hors du cercle de stabilité

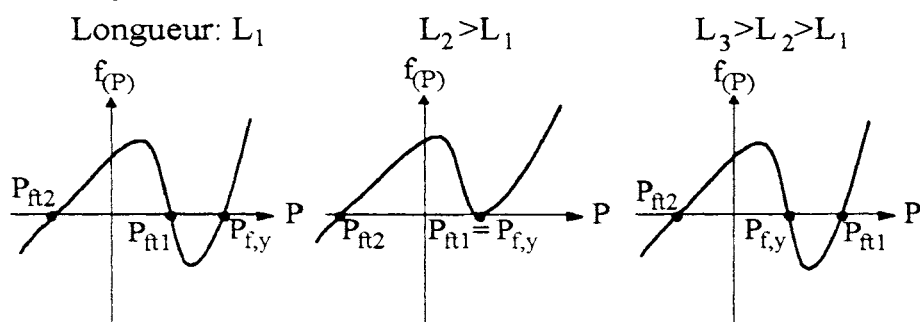


Figure 3.9- Représentation graphique de l'analyse de signes des équations (3.22) ou (3.23) pour les sections à un axe de symétrie, axe  $y$ , avec charge de compression appliquée sur cet axe.

Ce type de comportement peut être mieux compris à l'aide de la figure 3.10 construite pour le profil CLC/1-90x90, dont les dimensions ont déjà été données à la figure 3.3. Sur cette figure on montre le comportement des courbes de  $P_{f,y}$  et de  $P_{ft1}$ , pour deux valeurs

d'excentricité  $y_p$ , en fonction de la longueur de la colonne. Comme déjà dit, les courbes de flambement par flexion-torsion tendent à se confondre avec celle de flambement par flexion dans le plan  $xy$  lorsque la longueur de la colonne augmente. A cause des caractéristiques géométriques du profil choisi pour cette figure, les courbes de  $P_{ft1}$ , pour les excentricités choisies, ne croisent pas la courbe de  $P_{f,y}$  pour des grandes longueurs de la colonne. Ceci est dû au fait que le rapport de la largeur de la semelle à la hauteur de l'âme est très proche de 1, voir figure 3.3; c'est à dire, que c'est une section en C très proche d'un carré, ce qui favorise fortement le flambement par flexion-torsion de la colonne.

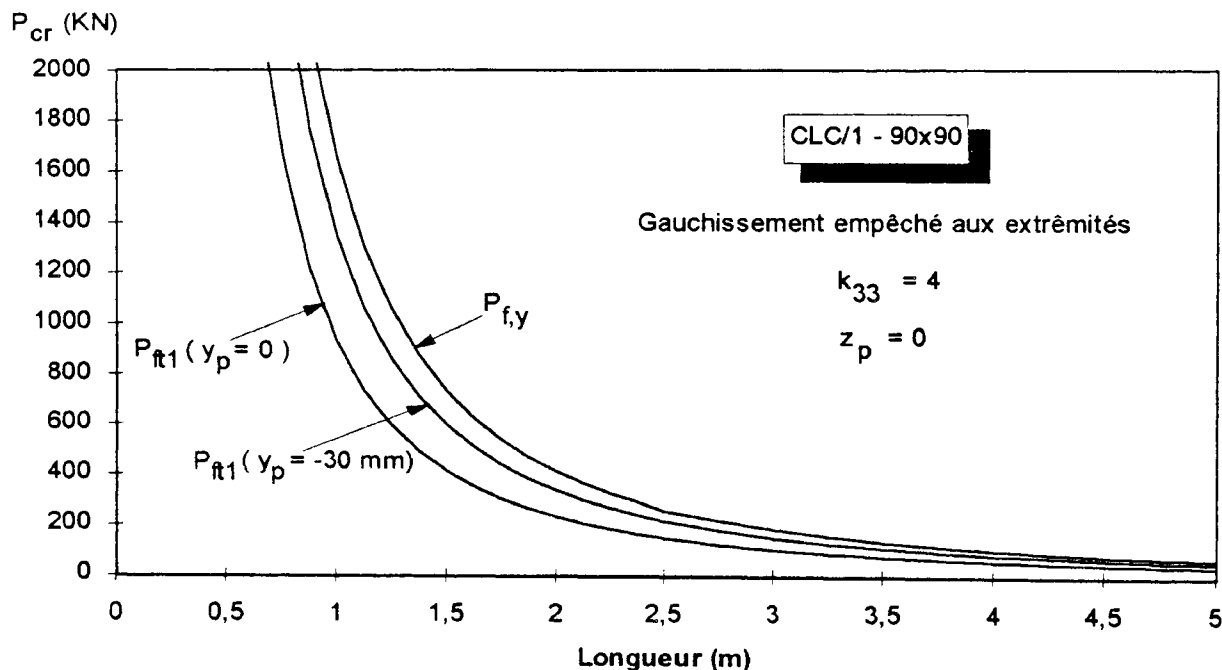


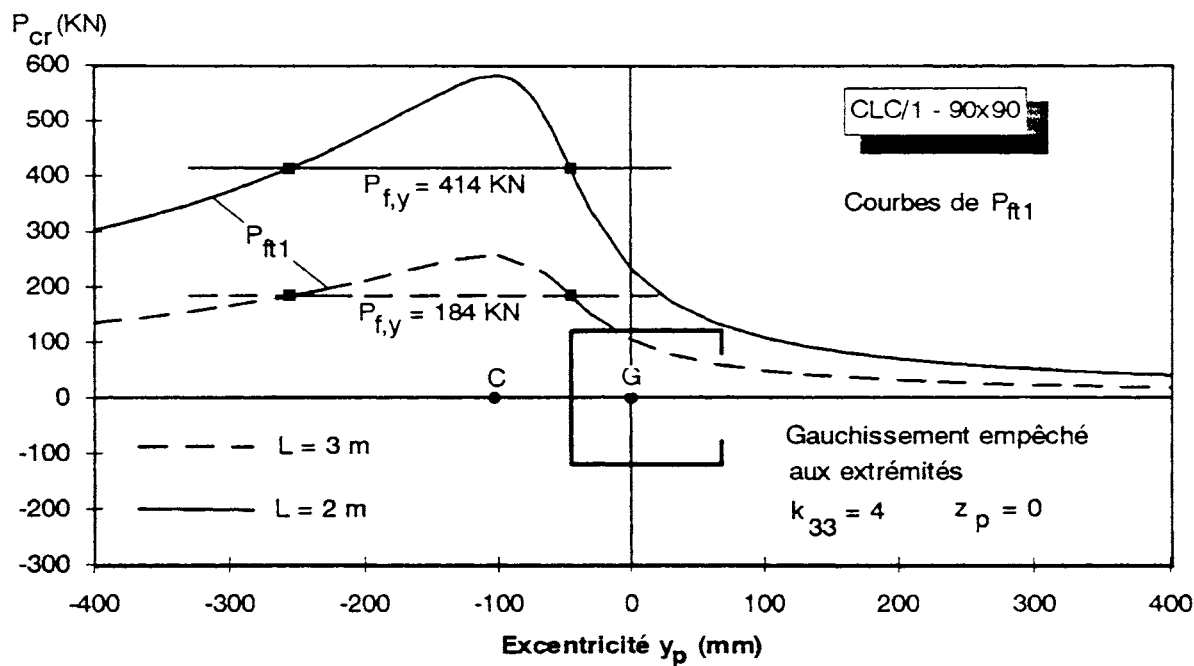
Figure 3.10- Variation de la charge critique du profil CLC/1-90x90 avec sa longueur et l'excentricité de la charge.

Les figures 3.11a et 3.11b montrent le comportement des racines  $P_{ft1}$  et  $P_{ft2}$  de l'équation (3.34) avec l'excentricité  $y_p$  pour une charge appliquée sur l'axe de symétrie de la section du profil CLC/1-90x90. Les courbes sont aussi données pour deux valeurs différentes de la longueur de la colonne.

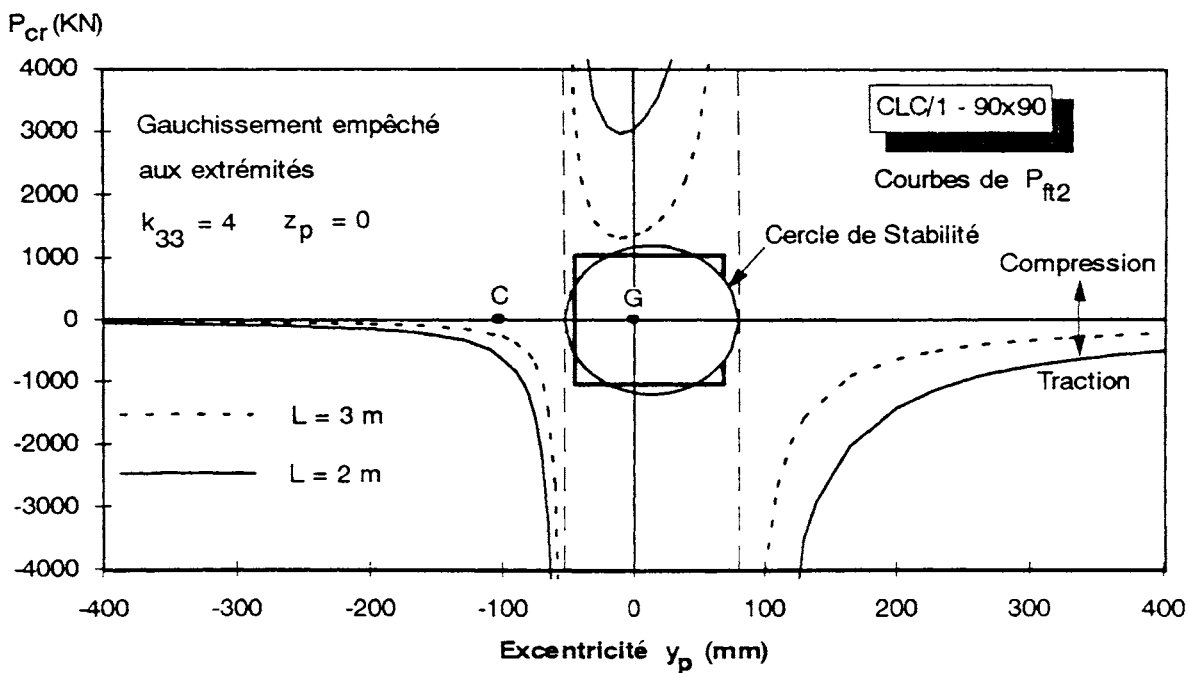
La figure 3.11a montre que le risque d'un flambement par flexion-torsion est plus important pour des excentricités  $y_p$  positives que pour des excentricités  $y_p$  négatives. En outre, on note que  $P_{ft1}$  atteint sa valeur maximum au centre de torsion où, comme déjà remarqué au paragraphe 3.3.2, il y a un découplage complet entre les trois modes fondamentaux de la colonne. Cependant, sur une certaine étendue d'excentricités négatives qui contient le centre de torsion, la charge critique est limitée par le palier du flambement par flexion dans le plan de symétrie de la section. Les points carrés marqués sur cette



figure montrent les excentricités pour lesquelles les modes critiques de flambement par flexion et par flexion-torsion sont coïncidents ( $P_{f,y} = P_{ft1}$ ).



(a)



(b)

Figure 3.11- Comportement de la charge critique de flambement par flexion-torsion avec l'excentricité  $y_p$  de la charge appliquée sur l'axe de symétrie du profil CLC/1-90x90.

(a) Comportement de  $P_{ft1}$ ;

(b) Comportement de  $P_{ft2}$ .

Quant au comportement de la racine  $P_{R2}$ , la figure 3.11b montre que le flambement par flexion-torsion peut se produire pour une charge de traction lorsque celle-ci est appliquée en dehors du cercle de stabilité ( $P_{R2}$  négative). On note que, quand le point d'application s'approche du côté extérieur du cercle de stabilité vers celui-ci, la force de traction  $P_{R2}$  augmente vers une valeur infinie et subit une discontinuité en changeant de signe lorsque le point d'application passe à l'intérieur du cercle de stabilité.

Contrairement à ce qui a été vu à la figure 3.11a pour le cas de la charge critique de compression, la figure 3.11b montre que lorsque la charge critique est de traction ( $P_{R2}$  négative), le risque d'un flambement par flexion-torsion est plus important pour des excentricités  $y_p$  négatives que pour des excentricités  $y_p$  positives. Or, ceci donne déjà des indices de ce que, quand la section transversale de la colonne est soumise à un gradient de contraintes dans son plan de symétrie, sa résistance est plus pénalisée lorsque le côté ouvert de la section (dans ce cas, les raidisseurs du profil C) est celui qui est le plus comprimé, en absence du voilement. En plus, malgré que les échelles des ordonnées des figures 3.11a et 3.11b soient différentes, l'examen attentif des valeurs de charges critiques pour des excentricités négatives ( $y_p < -200\text{mm}$ ) montre que, en valeur absolue, les charges critiques par traction sont plus petites que celles par compression, ce qui vient à consolider encore plus l'observation déjà faite. D'ores et déjà, on peut conclure que, dans le cas d'une charge de compression axiale, une déformée initiale dans le plan de symétrie est plus défavorable lorsque son côté convexe est tourné vers le centre de torsion de la section transversale de la colonne.

#### **3.3.3. Les instabilités couplées**

Eu égard à la coïncidence de modes critiques d'instabilité, soit par variation de la longueur de la colonne, soit par variation de l'excentricité de la charge, il est utile de souligner quelques remarques très intéressantes à propos de ce sujet. Lorsqu'il y a une coïncidence d'au moins deux modes critiques d'instabilité, la structure péricule par instabilité couplée de ces modes engendrée par la présence d'imperfections généralisées qui sont inhérentes aux structures réelles. Dès lors, il est utile d'introduire le concept d'érosion, qui est la perte de résistance de la structure imparfaite par rapport à la structure parfaite due aux imperfections généralisées de celle-ci. Dans un rapport de recherche très récemment présenté à la première conférence CIMS (Coupled Instabilities in Metal Structures) en Roumanie, GIONCU [70] donne un résumé complet et très clair de ce type de phénomène. Selon son rapport, on peut classer les instabilités couplées selon la linéarité ou la non-linéarité du couplage des modes, comme suit:

- a) Couplage linéaire: ce type de couplage se produit lorsque deux modes sont couplés dès l'origine, indépendamment de la présence d'imperfections. C'est, par exemple, le cas de l'interaction du flambement par flexion autour de l'axe fort avec le flambement par

torsion autour du centre de torsion (flambement par flexion-torsion), dont la charge critique est  $P_{ft1}$  (en cas de compression) ou  $P_{ft2}$  (en cas de traction).

- b) Couplage non-linéaire: ce type de couplage ne se produit que pour certaines proportions géométriques de la structure et la présence d'imperfections géométriques est indispensable pour le couplage. Pour des structures parfaites, ce couplage n'existe pas. C'est, par exemple, le cas lorsque le flambement par flexion coïncide avec le flambement par flexion-torsion; autrement dit, quand  $P_{f,y} = P_{ft1}$ .

La figure 3.12a montre l'érosion subie par la colonne imparfaite lors du passage du flambement par flexion-torsion ( $P_{ft1}$ ) au flambement par flexion ( $P_{f,y}$ ) avec la variation des paramètres géométriques généralisés de la colonne. On peut observer que l'érosion est plus importante au voisinage du point de coïncidence des deux modes d'instabilité.

Un autre cas de couplage très intéressant et qui fait l'objet de cette thèse est celui entre le mode critique de flambement global de la colonne et le mode de voilement local des parois constituant le profil de la colonne. Ce type de couplage, déjà étudié au paragraphe 3.1, est repris ici à la lumière de la théorie plus générale d'instabilité couplée présentée dans la figure 3.12b. Sur cette figure  $P_{cr,s}$  est la charge critique de voilement de la section et  $P_{cr}$  est la charge critique d'instabilité globale de la colonne. Les mêmes remarques déjà faites pour la figure 3.12a sont aussi valables pour la figure 3.12b, à l'exception de la région où  $P_{cr,s}$  est plus petit que la charge de ruine  $P_{ruine}$  de la structure réelle. Dans cette région, l'érosion est négative à cause de la réserve post-critique de voilement de la section. En fait, l'intersection de la courbe  $P_{cr,s}$  avec la courbe  $P_{ruine}$  marque le changement de comportement d'un tronçon court à un tronçon long.

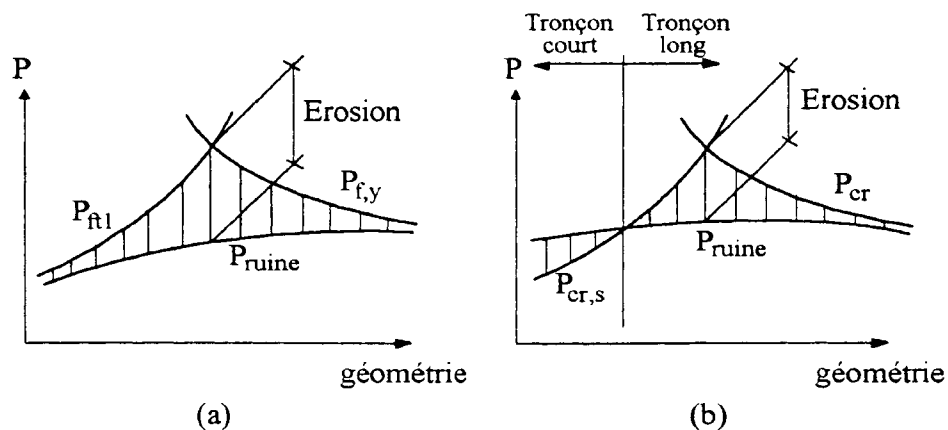


Figure 3.12- Erosion de l'instabilité couplée.

Autrefois, on croyait que le dimensionnement optimal d'une structure était atteint lorsque sa géométrie était ajustée de manière à avoir l'apparition simultanée d'au moins deux modes critiques d'instabilité. Ce principe était nommé 'principe de dimensionnement à flambement simultané' de BLEICH-SHANLEY [48]. Aujourd'hui, grâce à la théorie

générale d'instabilité couplée, on sait que l'application de ce principe peut devenir très insécuritaire car le couplage de différents modes critiques entraîne une sensibilité plus sévère aux imperfections initiales de la structure. Ceci vient à l'encontre des conclusions de van der NEUT [60,61], déjà discutées au paragraphe 3.1, dans le cas de colonnes constituées par des profils à parois minces.

#### **3.4. LES METHODES DE DIMENSIONNEMENT SEMI-EMPIRIQUES DE L'EUROCODE 3 ET DE L'AISI-90**

Cette classe de méthodes pour le calcul de la charge de ruine de colonnes constituées par des profils en acier à parois minces est sans doute la plus aisée à employer car elle fait appel à l'utilisation de courbes de flambement. Ces courbes de flambement, étant basées sur des résultats expérimentaux et des études théoriques, apparaissent comme un outil très naturel lors de la vérification de la stabilité de colonnes en acier.

Du côté Européen on trouve les courbes de flambement Européennes élaborées par la CECM (Comission Européenne pour la Construction Métallique). Les bases expérimentales pour leur détermination, ainsi que leurs bases théoriques sont données dans les références [71] et [72], respectivement. La représentation initiale des courbes de la CECM était sous la forme de tableaux. Afin de faciliter leur utilisation, RONDAL et MAQUOI [73] ont proposé une formulation analytique de type AIRTON-PERRY [74] liée à la définition d'un coefficient d'imperfection généralisé pour représenter les différentes courbes de la CECM. Sur le continent Américain, plus précisément aux Etats-Unis, on trouve la courbe de flambement élaborée par le Column Research Council (CRC), dont les concepts de base sont donnés dans la référence [75]. Les courbes de la CECM et la courbe du CRC sont, à l'heure actuelle, celles proposées dans les spécifications de l'Eurocode 3 [56] et de l'AISI-90 [57], respectivement. Eu égard aux concepts de base de ces courbes, on peut citer quelques différences:

- a) La courbe du CRC est tout d'abord unique et d'application pour tous les types de profils, alors que pour la CECM, différentes courbes sont associées aux différents types de profils;
- b) La courbe du CRC ne contient pas de palier de longueur constante pour la résistance de tronçons courts, alors que c'est le cas pour les courbes Européennes;
- c) La courbe du CRC ne considère pas l'érosion de la résistance de colonnes due aux imperfections géométriques et structurales des profils lorsque la contrainte critique par instabilité globale de la colonne  $\sigma_{cr}$  est plus petite que  $f_y/2$ ;
- d) La courbe du CRC est une courbe moyenne par rapport aux résultats théoriques et expérimentaux de flambement de colonnes, alors que celles de la CECM sont des courbes caractéristiques par rapport aux mêmes résultats.

### III - L'interaction entre le voilement local et les modes globaux d'instabilité

Parmi les recherches théoriques-expérimentales plus récentes qui ont contribué au dimensionnement moderne de colonnes constituées par des profils à parois minces, on peut distinguer celle due à RONDAL [76,77] dans le cadre des profils creux à section carrée ou rectangulaire. Ce dernier propose une méthode très simple et efficace pour la prise en compte du voilement des parois du profil lors de la vérification de la stabilité de colonnes à l'aide des courbes de flambement de la CECM. Sa proposition est basée sur l'idée que la charge de ruine  $P_{TC}$  d'un tronçon court à parois minces est appelée à jouer le même rôle que la charge de ruine plastique  $P_y$  du même tronçon court considéré avec des parois épaisses dans les équations des courbes de flambement. Ainsi, la prise en compte de l'interaction entre le voilement local et le flambement global se fait par substitution, dans les équations des courbes de flambement, de  $P_{TC}$  à  $P_y$  tant dans la définition de l'élanement réduit que dans celle du coefficient de réduction au flambement.

Dans sa thèse de doctorat, BATISTA [50] a utilisé la proposition de RONDAL appliquée au cas de profils à section ouverte, soit les profils à section en U et en C. BATISTA a trouvé une très bonne corrélation entre ses résultats expérimentaux et les résultats théoriques ainsi calculés. Dès lors, on est tenté de généraliser cette proposition pour tous les types de profils trouvés en pratique. C'est ainsi que, comme on verra plus loin, cette proposition a été adoptée dans les spécifications de l'Eurocode 3 [56] non seulement pour la vérification de la stabilité de colonnes comprimées, mais aussi pour la vérification de la stabilité au déversement.

En ce qui concerne les bases de dimensionnement du point de vue statistique, les deux spécifications précitées sont basées sur la doctrine semi-probabiliste de vérification aux états limites. Dans cette méthode le chargement nominal et la résistance nominale sont affectés de coefficients partiels de sécurité afin de garantir que la probabilité d'atteindre un certain état-limite de la structure soit acceptablement petite. Cette conception de dimensionnement possède quelques avantages sur la conception ancienne de dimensionnement aux contraintes admissibles:

- a) Les incertitudes et les variances des différents types de chargements (poids propre, surcharge, vent, ...) et de résistance (à la compression, au déversement, de connections, ...) peuvent être prises en compte par l'utilisation de multiples coefficients partiels de sécurité;
- b) Sur base de la théorie de la probabilité, le dimensionnement de divers composants de la structure peut atteindre une fiabilité uniforme.

Bien que la courbe du CRC soit une courbe moyenne, comme on l'a déjà dit, les Américains sont parvenu à transformer leur norme de 1986, AISI-86 ASD (Allowable Stress Design) pour aboutir à la norme actuelle AISI-90 LRFD (Load and Resistance Factor Design). Un résumé des efforts de recherche entrepris aux Etats-Unis afin

d'introduire le concept de dimensionnement aux états limites dans leur norme a été publié par HSIAO, YU et GALAMBOS, référence [78].

Quant à la limite élastique  $f_y$  utilisée tant dans l'Eurocode 3 que dans l'AISI-90, ces codes permettent de prendre pour  $f_y$  la limite élastique caractéristique moyenne de la section compte tenu du travail à froid du processus de fabrication sur la région des arrondis de la section lorsque les calculs indiquent que, à l'état limite ultime, les parois de la section ne voilent pas; autrement dit, quand la quantité  $\rho = b_e/b_c$  (tableaux 2.3 et 2.4) est égale à 1. Si par contre,  $\rho < 1$ , on doit prendre pour  $f_y$  la limite élastique caractéristique du matériau de base à partir duquel le profil est fabriqué. La raison pour cette limitation est que, à l'état-limite ultime, les largeurs effectives sont données par la formule de WINTER (voir les tableaux 2.3 et 2.4). Or, malgré le fait que les expérimentations de WINTER étaient basés sur des plaques de profils formés à froid et, par voie de conséquence, que leur limite élastique n'était pas uniforme dans la direction transversale de la plaque, *il a toujours utilisé la limite élastique du matériau de base pour vérifier sa formule*. En fait, sa formule tient compte, d'une manière générale, non seulement des imperfections géométriques locales, mais aussi des imperfections structurales comme les contraintes résiduelles et l'hétérogénéité de la limite élastique dus au processus de formage.

Dans ce qui suit, on présentera une comparaison entre les propositions de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 pour la vérification à l'état-limite ultime de la stabilité de poutres-colonnes constituées par des profils à parois minces et soumises à la flexion-compression. Dans ce but, l'exposé est scindé en quatre tableaux comparatifs:

- 1) Tableau 3.3 pour le calcul de la résistance de colonnes soumises à la compression centrée;
- 2) Tableau 3.4 pour le calcul de la résistance de sections, eu égard à la flexion;
- 3) Tableau 3.5 pour le calcul de la résistance de poutres, eu égard au déversement;
- 4) Tableau 3.6 pour la vérification de la stabilité de poutres-colonnes soumises à la flexion-compression.

La notation utilisée dans ces tableaux est claire et auto-explicative. L'indice **Sd** utilisé pour certaines des variables se réfère aux efforts internes dus au chargement pondéré par des coefficients partiels de sécurité. Autrement dit, il se réfère aux efforts de dimensionnement. Au contraire, l'indice **Rd** se réfère à la résistance de dimensionnement qui est la résistance nominale, indiquée par l'indice **Rn**, pondérée par des coefficients partiels de sécurité.

En dehors des différences de conception entre les courbes de flambement Européennes et celle du CRC, déjà discutées, l'examen attentif du tableau 3.3 permet de relever

quelques différences importantes entre les approches de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 pour le dimensionnement d'une colonne chargée centriquement:

- a) Dans la démarche de l'Eurocode 3, le premier pas consiste à calculer la section effective à une contrainte égale à  $f_y$  afin d'avoir la résistance du tronçon court,  $P_{TC}$ , qui est introduite dans la courbe de flambement pour tenir compte du voilement. Au contraire, du côté Américain on calcule d'abord la contrainte réduite au flambement en négligeant le voilement, pour en suite calculer la section effective  $A_{es}$  afin de réduire la charge de ruine à cause du voilement;
- b) Du côté Européen la charge n'est considérée centrée que si elle agit sur le centre de gravité de la section effective calculée à la limite élastique  $f_y$ , alors que pour les Américains le chargement est centré s'il agit sur le centre de gravité de la section effective calculée pour la contrainte réduite au flambement  $\sigma_s$ . Dès lors, on s'aperçoit que dans la pratique du dimensionnement de profils à section ouverte, il se produira très difficilement une situation de chargement centré, donc il faudra très souvent faire appel au dimensionnement à la flexion-compression;
- c) Alors que l'AISI-90 utilise une seule courbe de flambement pour tous les profils, l'Eurocode 3 utilise des courbes de flambement ajustées à chaque type de profil à l'aide du coefficient d'imperfection  $\alpha$ ;
- d) Finalement, en ce qui concerne le coefficient partiel de sécurité multiplicatif, l'AISI-90 semble être plus sévère que l'Eurocode 3. Ceci vient probablement du fait que la courbe du CRC est une courbe moyenne, alors que les courbes de flambement Européennes sont des courbes caractéristiques, comme déjà dit.

En outre les spécifications de l'AISI-90 montrées dans le tableau 3.3, dans le cas de profils possédant des semelles avec un bord libre comme la cornière et le profil U, la valeur de  $P_{Rn}$  doit être la plus petite entre celle donnée au tableau 3.3 et celle obtenue en multipliant la contrainte critique de voilement de la semelle de largeur  $b_p$  par l'aire de la section pleine, donnée par l'expression suivante:

$$P_{Rn} = \frac{0,43\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b_p} \right)^2 A \quad (3.36)$$

Dans le cas de la cornière, cette dernière valeur de  $P_{Rn}$  ne doit pas être très différente de la valeur de  $P_{Rn}$  obtenue par le tableau 3.3 lorsque le flambement par flexion-torsion est celui qui gouverne car, comme on l'a déjà vu au paragraphe 2.4.2, la charge critique de voilement des parois d'une cornière est très proche de sa charge critique de flambement par torsion. Cependant, il faut aussi noter que la prise en compte du voilement pour le dimensionnement d'une cornière dont le mode critique est celui de flexion-torsion doit

donner un dimensionnement trop conservatif à cause de la similitude existante entre les phénomènes de voilement local et de flambement global, ce qui reviendrait à tenir compte doublement de l'un ou l'autre phénomène.

Dans le cas d'une colonne à section en U, la charge critique de voilement de ses semelles ne garde pas un rapport aussi étroit avec la charge critique de flambement par flexion-torsion comme il en est pour la cornière. Donc, la limitation de  $P_{Rn}$  à la charge critique de voilement des semelles, comme spécifié par l'AISI-90, peut conduire à un dimensionnement qui est très conservatif par rapport à celui proposé par l'Eurocode 3, comme il a été vérifié par DUBINA [79] lors d'une revue des propositions Européenne et Américaine pour le dimensionnement de colonnes comprimées.

En somme, la prise en compte de l'équation (3.36) pour le dimensionnement d'une cornière ne ferait que redéfinir un palier de tronçon court un peu plus bas que celui des courbes de flambement Européennes. Cette même condition appliquée aux colonnes à section en U peut redéfinir un palier beaucoup plus bas pouvant même aller jusqu'à 50% de la charge de ruine du tronçon court [79].

Les tableaux 3.4 et 3.5 présentent les propositions de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 pour le calcul de la résistance de sections à la flexion en absence de déversement et pour le calcul du moment résistant au déversement, respectivement. Pour le tableau 3.4 il faut noter qu'on ne fait pas de distinction si le moment est autour de l'axe y ou de l'axe z. Le moment  $M_{o,Rd}$  peut être soit  $M_{yo,Rd}$ , soit  $M_{zo,Rd}$ . En plus il n'y a aucune différence importante entre les deux approches et donc toute observation est reportée à l'examen de ce tableau. Quant au tableau 3.5, il y a deux remarques à faire:

- a) Alors que l'Eurocode 3 fait la distinction entre l'axe fort et l'axe faible, et donc qu'il considère que le déversement ne se produit que pour la flexion autour de l'axe fort, l'AISI-90 fait plutôt la distinction entre l'axe de symétrie et l'axe de non-symétrie de la section, pour lesquels elle fournit des formules pour le calcul de  $M_{cr}$  selon les deux axes. Ainsi, du côté Américain chaque axe de la section possède un moment résistant au déversement malgré le fait qu'un seul axe de la section soit forcément l'axe fort;
- b) On note que le premier pas de la démarche de l'Eurocode 3 consiste à calculer la valeur de  $M_{yo,Rn}$  à l'aide du tableau 3.4, en calculant d'abord la section effective en flexion, à une contrainte égale à  $f_y$  dans la fibre la plus sollicitée. En suite, la valeur de  $M_{yo,Rn}$  est appelée à jouer le même rôle que celui du moment plastique d'une section compacte dans la courbe de flambement afin de tenir compte du voilement. Au contraire, du côté Américain, on calcule d'abord la contrainte réduite au déversement,  $\sigma_b$ , en négligeant le voilement, pour ensuite calculer le module  $W_{eb}$  de la section effective pour une contrainte égale à  $\sigma_b$  au bord comprimé afin de réaliser une réduction du moment réduit au déversement,  $M_b$ , à cause du voilement.



Finalement, le tableau 3.6 montre les spécifications de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 pour la vérification de la stabilité de pièces longues soumises à la flexion-compression. Avant toutes choses, on rappelle que les charges critiques de compression  $P_{f,y}$  et  $P_{f,z}$  sont pour le flambement dans les plans xy et xz, respectivement. On peut formuler les remarques suivantes à partir de l'examen de ce tableau:

- a) Les deux spécifications imposent que les moments de dimensionnement soient corrigés afin de tenir compte du déplacement du centre de gravité de la section pleine vers la section effective. A cet égard, la seule différence entre les deux spécifications réside dans le fait que l'Eurocode 3 considère le centre de gravité de la section effective calculée pour une compression uniforme égale à  $f_y$ , alors que l'AISI-90 considère la section effective calculée à  $P_{Sd}/A$ ;
- b) On note que pour l'AISI-90 on peut distinguer très clairement le coefficient d'équivalence de moments,  $\beta_M$ , et les coefficients d'amplification  $\alpha_{ny}$  et  $\alpha_{nz}$ , alors que pour l'Eurocode 3 ces coefficients sont mélangés de telle manière qu'on perd leur sens physique.

Vérification de la stabilité à la compression centrée	
EUROCODE 3	AISI-90
$P_{Sd} \leq P_{Rd}$ $P_{Rd} = \gamma_c P_{Rn}$	
$P_{Rn} = \chi P_{TC}$  $\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{1/2}} \leq 1$ $\phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$ Cornière et profil U - courbe c: $\alpha = 0,49$ Profil C - courbe b: $\alpha = 0,35$  $P_{TC} = A_e f_y$ $A_e$ - aire de la section effective calculée pour une compression uniforme à $f_y$ . La charge de compression est considérée centrée si son point d'application coïncide avec le centre de gravité de l'aire $A_e$ .  $\bar{\lambda} = \left( \frac{P_{TC}}{P_{cr}} \right)^{1/2}$ $P_{cr} = A \sigma_{cr}$	$P_{Rn} = A_{es} \sigma_s$ $A_{es}$ - aire de la section effective calculée pour une compression uniforme de $\sigma_s$ . La charge de compression $P_{Sd}$ est considérée centrée si son point d'application coïncide avec le centre de gravité de l'aire $A_{es}$ . $\sigma_s$ est donnée par: $\begin{cases} \sigma_{cr} > \frac{f_y}{2} \Rightarrow \sigma_s = f_y \left( 1 - \frac{f_y}{4\sigma_{cr}} \right) \\ \sigma_{cr} \leq \frac{f_y}{2} \Rightarrow \sigma_s = \sigma_{cr} \end{cases}$
A- aire de la section pleine $\sigma_{cr}$ est la contrainte de flambement global de la colonne avec ( $y_p = 0, z_p = 0$ ). Pour le cas particulier de la cornière, profil U et profil C, $\sigma_{cr}$ est donnée par la plus petite des valeurs $P_{f,y}$ et $P_{fl}$ (paragraphe 3.3.2.1) divisée par l'aire A.	
Coefficient partiel de sécurité	
$\gamma_c = \frac{1}{1,1} = 0,91$	$\gamma_c = 0,85$

Tableau 3.3- Comparaison entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90 pour la vérification de la stabilité de colonnes soumises à la compression centrée.

Vérification de la résistance de la section en flexion	
EUROCODE 3	AISI-90
$M_{Sd} \leq M_{o,Rd}$ $M_{o,Rd} = \gamma_F M_{o,Rn}$ $M_{o,Rn} = W_e f_y \text{ ou calculé avec réserve plastique}$ <p><math>W_e</math> est le module de la section effective calculée en flexion pour une contrainte égale à <math>f_y</math>. En fonction de la position de l'axe neutre de la section effective, l'atteinte de la limite élastique peut se produire en premier, soit dans la semelle comprimée, soit dans la semelle tendue de la section transversale.</p>	
Lorsque la colonne est sujette au déversement ou au flambement par torsion ou par flexion-torsion, il n'est pas permis d'utiliser la réserve plastique quand la semelle comprimée est celle qui atteint $f_y$ en premier. Si, par contre, c'est la semelle tendue qui atteint $f_y$ en premier, il est permis d'utiliser la réserve plastique.	Lorsque la colonne est sujette au déversement ou au flambement par torsion ou par flexion-torsion, il n'est pas permis d'utiliser la réserve plastique.
Coefficient partiel de sécurité	
$\gamma_F = \frac{1}{1,1} = 0,91$	<p>Quand la semelle comprimée est une plaque appuyée sur les deux bords, comme par exemple le profil C, on a:</p> $\gamma_F = 0,95$ <p>Quand la semelle comprimée est une plaque appuyée sur un seul bord, comme par exemple la cornière et le profil U, on a:</p> $\gamma_F = 0,90$

Tableau 3.4- Comparaison entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90 pour la vérification de sections d'extrémités de poutres fléchies.

Vérification de la stabilité au déversement	
EUROCODE 3 ( $I_y > I_z$ )	AISI-90
$M_{Sd} \leq M_{LT,Rd}$	
$M_{yLT,Rd} = \chi_{LT} \gamma_{LT} M_{yo,Rn}$  $\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + [\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2]^{1/2}} \leq 1$ $\phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$ Courbe a: $\alpha_{LT} = 0,21$ Calcul de $M_{o,Rn}$ selon le tableau 3.4.  $\bar{\lambda}_{LT} = \left( \frac{M_{yo,Rn}}{M_{cr}} \right)^{1/2}$ Si $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4 \rightarrow \chi_{LT} = 1$	$M_{LT,Rd} = \gamma_{LT} M_{LT,Rn}$ $M_{LT,Rn} = W_{eb} \sigma_b$ $W_{eb}$ - module de la section effective calculé en flexion pour une contrainte égale à $\sigma_b$ dans la semelle comprimée.  $\sigma_b = \frac{M_b}{W}$ $W$ - module de la section pleine pour la semelle comprimée.  $\begin{cases} M_{cr} > 0,5M_y \rightarrow M_b = M_y \left( 1 - \frac{M_y}{4M_{cr}} \right) \\ M_{cr} \leq 0,5M_y \rightarrow M_b = M_{cr} \end{cases}$ $M_y = W f_y$
$M_{cr}$ est le moment critique de déversement.	
Des formules pour le calcul de $M_{cr}$ peuvent être trouvées dans:	
l'annexe F de l'Eurocode 3.	l'AISI-90.
Coefficient partiel de sécurité.	
$\gamma_{LT} = \frac{1}{1,1} = 0,91$	$\gamma_{LT} = 0,90$

Tableau 3.5- Comparaison entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90 pour la vérification de la stabilité au déversement de poutres fléchies.

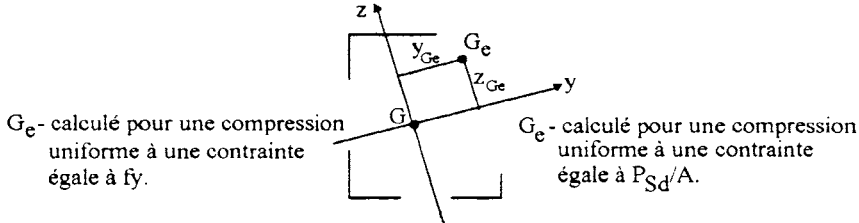
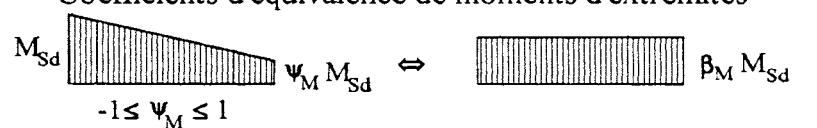
Vérification de la stabilité à la flexion-compression	
EUROCODE 3 ( $I_y > I_z$ )	AISI-90
$\frac{P_{Sd}}{P_{Rd}} + \frac{\kappa_{LT} M'_{y,Sd}}{M_{yLT,Rd}} + \frac{\kappa_z M'_{z,Sd}}{M_{zo,Rd}} \leq 1$	$\frac{P_{Sd}}{P_{Rd}} + \frac{\beta_{M,y} M'_{y,Sd}}{M_{yLT,Rd} \alpha_{ny}} + \frac{\beta_{M,z} M'_{z,Sd}}{M_{zLT,Rd} \alpha_{nz}} \leq 1$
<p><math>G_e</math> - centre de gravité de la section effective</p>  <p><math>G_e</math> - calculé pour une compression uniforme à une contrainte égale à <math>f_y</math>.</p> <p><math>G_e</math> - calculé pour une compression uniforme à une contrainte égale à <math>P_{Sd}/A</math>.</p> <p><math>M'_{y,Sd}</math> et <math>M'_{z,Sd}</math> - moments par rapport au centre de gravité de la section effective</p> <p><math>M'_{y,Sd} = M_{y,Sd} + P_{Sd} z_{Ge}</math> , <math>M'_{z,Sd} = M_{z,Sd} - P_{Sd} y_{Ge}</math></p> <p>Coefficients d'équivalence de moments d'extrémités</p>  <p><math>-1 \leq \psi_M \leq 1</math></p> <p><math>\beta_M = 1,8 - 0,7 \psi_M</math>                      <math>\beta_M = 0,6 + 0,4 \psi_M</math></p>	
Coefficients d'amplification	
<p>et aussi pour l'équivalence.</p> $\begin{cases} \kappa_{LT} = 1 - \frac{\mu_{LT} P_{Sd}}{P_{Rn,z}} \leq 1 \\ \mu_{LT} = 0,15 \bar{\lambda}_z \beta_{M,y} - 0,15 \leq 0,90 \end{cases}$ $\begin{cases} \kappa_z = 1 - \frac{\mu_z P_{Sd}}{P_{Rn,z}} \leq 1,5 \\ \mu_z = \bar{\lambda}_z (2\beta_{M,z} - 4) \leq 0,90 \end{cases}$ <p><math>P_{Rn,z} = \chi_z P_{TC}</math></p> $\left. \begin{aligned} \chi_z &= \chi(\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_z) \\ \bar{\lambda}_z &= \bar{\lambda}(P_{cr} = P_{f,y}) \end{aligned} \right\} \text{Tableau 3.3}$	$\alpha_{ny} = 1 - \frac{P_{Sd}}{\gamma_c P_{f,z}}$ $\alpha_{nz} = 1 - \frac{P_{Sd}}{\gamma_c P_{f,y}}$

Tableau 3.6- Comparaison entre l'Eurocode 3 et l'AISI-90 pour la vérification de la stabilité de colonnes soumises à la flexion-compression.

## **CHAPITRE 4**

### **L'ELEMENT FINI DE POUTRE SPATIALE**

4.1. INTRODUCTION	4.1
4.2. LA DESCRIPTION COROTATIONNELLE TOTALE	4.1
4.3. L'ELEMENT FINI DE de VILLE	4.4
4.3.1. Les hypothèses	4.4
4.3.2. Le champ de déplacements	4.4
4.3.2.1. La discrétisation	4.5
4.3.3. Les tenseurs de déformations et de contraintes	4.8
4.3.4. Les efforts internes énergétiquement équivalents	4.9
4.3.5. La matrice de rigidité tangente	4.11
4.3.6. La matrice de connexion	4.13
4.3.7. Les caractéristiques géométriques en torsion	4.17
4.3.7.1. La fonction de gauchissement	4.17
4.3.7.2. L'inertie en torsion	4.19
4.3.8. La plasticité	4.21
4.4. L'ELEMENT FINI A SECTION TRANSVERSALE VARIABLE	4.21
4.4.1. La variation de la section transversale	4.21
4.4.2. Actualisation de la matrice de rotation et de la déformée courante	4.24
4.4.3. Correction de la matrice de rotation et de la déformée courante	4.29
4.4.4. Les caractéristiques géométriques	4.31
4.4.5. Organigramme de calcul	4.34
4.5. UN TEST NUMERIQUE - LE CADRE DE LEE	4.35

# L'ELEMENT FINI DE POUTRE SPATIALE

## 4.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la description de l'élément fini et à la mise au point de l'introduction de la section transversale variable dans l'élément fini. La description de l'élément fini n'a pas pour but de présenter les développements originaux qui ont abouti à sa formulation, mais sa description est tout de même détaillée afin de donner une continuité du raisonnement lors de l'exposé de l'élément fini à section transversale variable. Quant à l'origine de la section transversale variable dans l'élément fini, elle provient du fait qu'on veut tenir compte du voilement de ses parois au moyen de la méthode de largeurs effectives qui sont mises à jour à chaque nouvelle itération du calcul non linéaire.

L'élément fini utilisé est celui de de VILLE, dont les développements originaux peuvent être trouvés dans sa thèse de doctorat [69]. C'est un élément fini de poutre spatiale du type déplacement, dont les propriétés suivantes ont guidé le choix:

- a) La section transversale de l'élément fini est constituée par des parois minces;
- b) La section peut être dissymétrique de telle sorte que le centre de gravité et le centre de torsion peuvent être deux points distincts;
- c) Le gauchissement de la section est pris en compte au moyen d'un 7ème degré de liberté, ce qui permet de simuler correctement le flambement par flexion torsion de profils à section ouverte;
- d) C'est un élément fini performant ayant la caractéristique d'éliminer les phénomènes de 'membrane locking' et de 'bending locking' qui sont propres aux éléments finis de poutre et de coque.

Il faut dire aussi que l'introduction d'une section transversale variable dans l'élément fini n'a aucune justification théorique quant à sa validité. En fait, c'est une méthode approchée qui a donné de bons résultats, comme le montre le chapitre précédent de cette thèse.

## 4.2. LA DESCRIPTION COROTATIONNELLE TOTALE (D.C.T.)

Le but de ce paragraphe est celui d'exposer au lecteur la Description Corotationnelle Totale (D.C.T.) de la théorie non linéaire de la Mécanique des Structures (figure 4.1). La D.C.T. est utilisée pour décrire les éléments finis non linéaires de poutre et de coque et est celle qui a été développée par de VILLE pour l'élaboration de son élément fini non linéaire de poutre spatiale.

La notation utilisée dans la figure 4.1 est la suivante:

#### IV - L'élément fini de poutre spatiale

$P_1, P_2$  - les noeuds (points de connexion) de l'élément fini;

$a$  - demi-longueur de l'élément fini;

$\Gamma_0$  - configuration de référence de l'élément fini dans son état de repos;

$(X_1, X_2, X_3)$  - axes locaux de la configuration de référence  $\Gamma_0$ ;

$\gamma_n$  - configuration courante déformée de l'élément fini dans l'espace;

$\hat{\Gamma}_n$  - configuration de référence de  $\gamma_n$  choisie sur sa corde;

$(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$  - axes corotationnels de  $\hat{\Gamma}_n$ ;

$\bar{X}(X_1, X_2, X_3)$  - position d'un point de l'élément en  $\Gamma_0$ ;

$\bar{\hat{X}}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$  - position d'un point de l'élément en  $\hat{\Gamma}_n$ ;

$\bar{U}(u_1, u_2, u_3)$  - déplacements de  $\gamma_n$  par rapport à  $\Gamma_0$ ;

$\bar{\hat{U}}(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$  - déplacements de  $\gamma_n$  par rapport à  $\hat{\Gamma}_n$ ;

$\gamma_{n+1}$  - configuration déformée de l'élément fini pour un incrément de charge à partir de  $\gamma_n$ ;

$d\bar{\hat{U}}(d\hat{u}_1, d\hat{u}_2, d\hat{u}_3)$  - incréments de déplacements permettant de trouver  $\gamma_{n+1}$  à partir de  $\gamma_n$ .

Comme on peut le constater à la figure 4.1, le grand avantage de l'utilisation de la D.C.T. réside dans le fait qu'il est plus aisé de définir mathématiquement le champ de déplacements  $\bar{\hat{U}}$  dans les axes corotationnels que de décrire le champ de déplacements  $\bar{U}$  dans les axes locaux initiaux. C'est pourquoi, la formulation de l'élément fini est développée dans les axes corotationnels. En effet, les axes corotationnels doivent suivre la déformée  $\gamma_n$  au cours du chargement de la structure. Donc, à chaque itération du processus de convergence du problème non linéaire, les axes corotationnels sont actualisés de manière à être toujours rattachés à la corde de la déformée  $\gamma_n$ .

Le principe des travaux virtuels pour la configuration courante  $\gamma_n$  dans la configuration de référence  $\hat{\Gamma}_n$  s'écrit:

$$\int_{\hat{V}} \hat{S}_{ij} \delta \hat{E}_{ij} d\hat{V} = \hat{P}_k \delta \hat{p}_k \quad ; \quad i, j = 1 \text{ à } 3 \text{ et } k = 1 \text{ à nombre de paramètres nodaux} \quad (4.1)$$

où:

$\hat{S}_{ij}$  - tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff n° 2;

$\hat{E}_{ij}$  - tenseur de déformations de Green;

$\hat{V}$  - volume de l'élément fini indéformé en  $\hat{\Gamma}_n$ ;



$\hat{P}_k$  - efforts internes énergétiquement équivalents;

$\hat{p}_k$  - paramètres nodaux de déplacements.

Il faut noter que ce principe (4.1) sert à trouver les efforts internes énergétiquement équivalents pour lesquels la configuration courante  $\gamma_n$  est en équilibre.

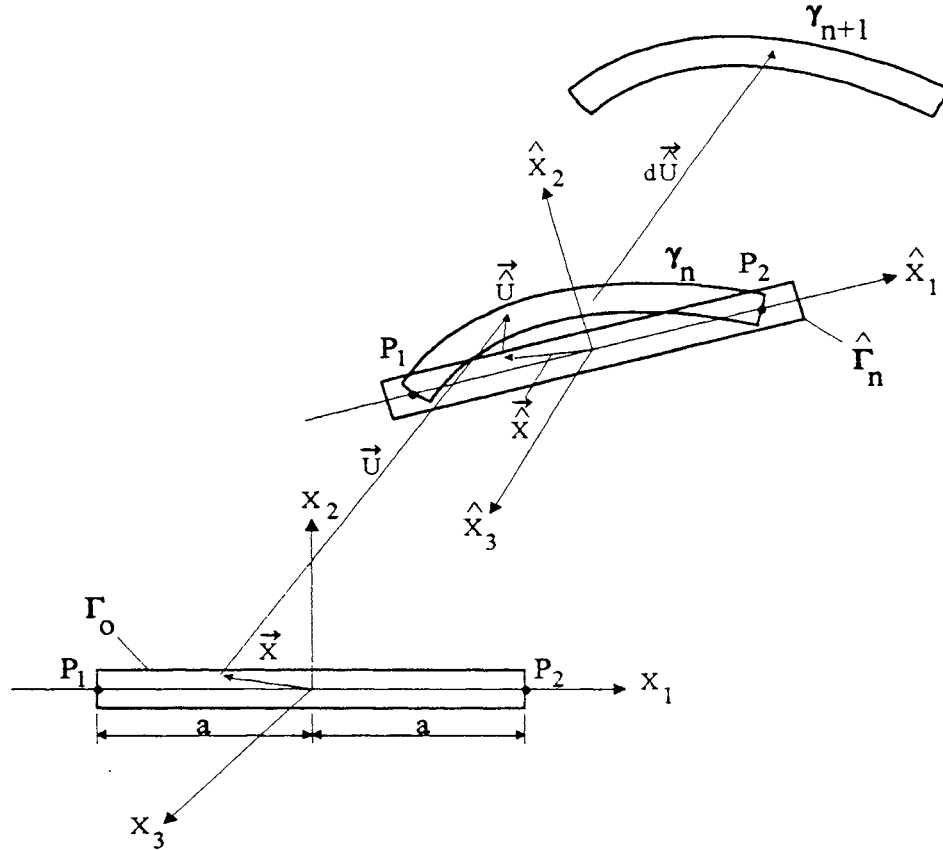


Figure 4.1- La Description Corotationnelle Totale (D.C.T.) pour l'élément fini de poutre spatiale.

En se basant sur le fait que le champ de déplacements  $\vec{U}(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$  est linéaire en les paramètres nodaux de déplacements  $\hat{p}_k$ , le principe des travaux virtuels sous la forme incrémentielle pour la configuration courante  $\gamma_n$  dans la configuration de référence  $\hat{\Gamma}_n$  s'écrit:

$$\int_{\hat{V}} (d\hat{S}_{ij} \delta \hat{E}_{ij} + \hat{S}_{ij} \delta d\hat{E}_{ij}) d\hat{V} = d\hat{P}_k \delta \hat{p}_k ; i, j=1, 3 \text{ et } k=1, \text{ nombre de paramètres nodaux} \quad (4.2)$$

avec:

$$d\hat{S}_{ij} = D_{ijkl} d\hat{E}_{kl} \quad (4.3)$$

où  $D_{ijkl}$  est le tenseur de la loi constitutive du matériel dans la forme incrémentielle.

Il faut noter que la forme incrémentielle du principe des travaux virtuels permet de trouver la configuration  $\gamma_{n+1}$  à partir de la configuration courante  $\gamma_n$  pour un incrément de la charge  $d\hat{P}_k$ .

Une fois que la formulation de l'élément fini est développée dans les axes corotationnels, afin de ne pas alourdir la notation utilisée dans les paragraphes qui suivent, la notation employée pour identifier ses variables (le chapeau sur la lettre) sera désormais abandonnée, tout en sachant qu'on a toujours affaire aux axes corotationnels.

### **4.3. L'ELEMENT FINI DE de VILLE**

#### **4.3.1. Les hypothèses**

Afin de bien synthétiser l'exposé de l'élément fini, on a choisi de montrer d'abord les hypothèses sur lesquelles de VILLE s'est basé lors du développement de son élément fini de poutre spatiale avant de passer à la présentation numérique dans les paragraphes précédents.

Les hypothèses, tirées de sa thèse, sont les suivantes:

- a) En flexion pure, la section droite reste plane et perpendiculaire à l'axe déformé de la poutre. Cette hypothèse due à BERNOULLI revient à négliger l'énergie de déformation par cisaillement;
- b) En torsion simple, la section droite subit un gauchissement proportionnel à l'accroissement de l'angle de torsion. Cette hypothèse due à VLASSOV, revient à négliger l'énergie de déformation induite par le cisaillement de gauchissement de la section;
- c) Les déformations sont petites et les rotations modérées. Le tenseur de déformations de von KARMAN est adopté;
- d) La section droite est transversalement indéformable.

#### **4.3.2. Le champ de déplacements**

Les déplacements continus  $u_{(x)}$ ,  $v_{(x)}$ ,  $w_{(x)}$  et  $\psi_{(x)}$  sont représentés à la figure 4.2 où on peut noter que  $v_{(x)}$  et  $w_{(x)}$  sont les déplacements transversaux au niveau du centre de torsion de la section, alors que  $u_{(x)}$  est le déplacement longitudinal mesuré au niveau du centre de gravité de la section.  $\psi_{(x)}$  est l'angle en torsion mesuré en radians.

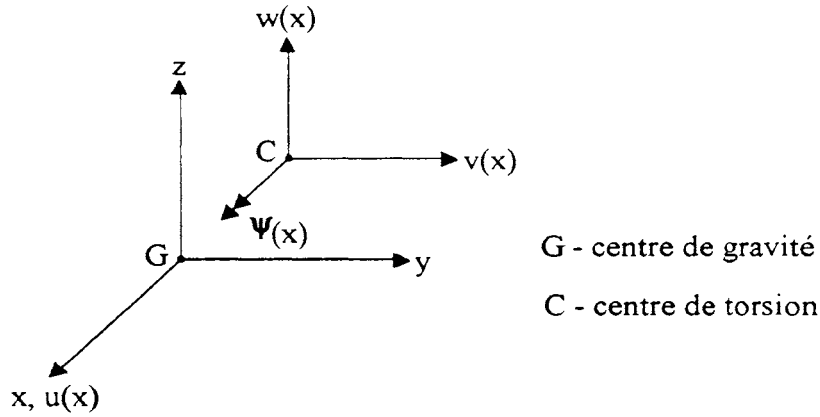


Figure 4.2- La géométrie des déplacements.

En fonction des déplacements  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$ ,  $\psi(x)$  et de ses dérivées, les déplacements d'un point quelconque de l'élément fini de poutre spatiale sont donnés par:

$$\begin{aligned} U_{(x,y,z)} &= u(x) - y[v'(x) + w'(x)\psi(x)] - z[w'(x) - v'(x)\psi(x)] - \omega_{(y,z)}^c \psi'(x) \\ V_{(x,y,z)} &= v(x) - (z - z_c)\psi(x) \\ W_{(x,y,z)} &= w(x) + (y - y_c)\psi(x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $\omega_{(y,z)}^c$  est la fonction de gauchissement de la section ayant pour pôle principal, le centre de torsion C de la section.

#### 4.3.2.1. La discrétisation

Avant de passer à la discrétisation proprement dite du champ de déplacement, il faut connaître les paramètres nodaux de déplacements ou inconnues nodales nécessaires pour définir complètement le champ de déplacements à l'intérieur de l'élément fini. La figure 4.3 montre les paramètres nodaux en question. On note que chaque noeud possède 7 paramètres ce qui en fait un total de 14 pour l'élément fini. Il y en a six pour les translations ( $U_1, V_1, W_1 - U_2, V_2, W_2$ ), six pour les rotations ( $\psi_1, \theta_{y1}, \theta_{z1} - \psi_2, \theta_{y2}, \theta_{z2}$ ) et deux pour la mesure de l'amplitude de gauchissement ( $\theta_{\psi1}, \theta_{\psi2}$ ).

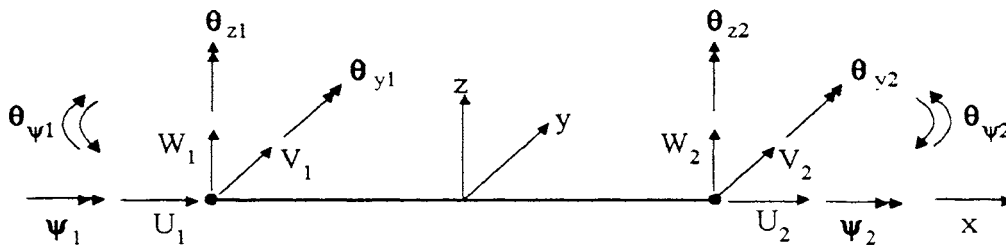


Figure 4.3- Les paramètres nodaux de l'élément fini.

#### IV - L'élément fini de poutre spatiale

Pour le champ de déplacement  $u_{(x)}$  on adopte une variation linéaire avec la variable  $x$ , on a donc:

$$u_{(x)} = h_{1(x)}U_1 + h_{2(x)}U_2 \quad (4.5)$$

avec:

$$\begin{aligned} h_{1(x)} &= -\frac{1}{2a}(x-a) \\ h_{2(x)} &= +\frac{1}{2a}(x+a) \end{aligned} \quad (4.6)$$

La discrétisation du champ de déplacement  $v_{(x)}$  est telle qu'elle permet de vérifier a priori l'équation d'équilibre en volume d'une poutre en l'absence de chargement transversal entre les noeuds:

$$v_{(x)}^{iv} = 0 \quad (4.7)$$

dont la solution:

$$v_{(x)} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \quad (4.8)$$

doit satisfaire les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} v_{(x=-a)} &= V_1 & ; & & v'_{(x=-a)} &= \theta_{z1} \\ v_{(x=+a)} &= V_2 & ; & & v'_{(x=+a)} &= \theta_{z2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

pour lesquelles on trouve:

$$v_{(x)} = h_{3(x)}V_1 + h_{4(x)}\theta_{z1} + h_{5(x)}V_2 + h_{6(x)}\theta_{z2} \quad (4.10)$$

avec:

$$\begin{aligned} h_{3(x)} &= \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2) & ; & & h_{4(x)} &= \frac{a}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) \\ h_{5(x)} &= \frac{1}{4}(-\xi^3 + 3\xi + 2) & ; & & h_{6(x)} &= \frac{a}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1) & ; & \xi = x/a \end{aligned} \quad (4.11)$$

De manière analogue, en appliquant le même raisonnement au champ  $w_{(x)}$ , on trouve:

$$w_{(x)} = h_{3(x)}W_1 - h_{4(x)}\theta_{y1} + h_{5(x)}W_2 - h_{6(x)}\theta_{y2} \quad (4.12)$$

Quant à la discrétisation du champ  $\psi_{(x)}$ , elle est telle qu'elle permet de vérifier a priori l'équation d'équilibre en volume de la torsion non uniforme de VLASSOV pour une poutre soumise à de la torsion et libre de toute charge entre les noeuds:

$$EI_{\omega}\psi^{iv} - GC_T\psi'' = 0 \quad (4.13)$$

dont la solution est:

$$\psi_{(x)} = A + Bx + C \cdot \text{ch}(kx) + D \cdot \text{sh}(kx) \quad (4.14)$$

avec:

$$k^2 = \frac{GC_T}{EI_\omega} \quad (4.15)$$

En imposant à l'équation (4.14) de satisfaire les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} \psi_{(x=-a)} &= \psi_1 & \psi'_{(x=-a)} &= \theta_{\psi 1} \\ \psi_{(x=+a)} &= \psi_2 & \psi'_{(x=+a)} &= \theta_{\psi 2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

on trouve:

$$\psi_{(x)} = h_{7(x)}\psi_1 + h_{8(x)}\theta_{\psi 1} + h_{9(x)}\psi_2 + h_{10(x)}\theta_{\psi 2} \quad (4.17)$$

avec:

$$\begin{aligned} h_{7(x)} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{kx}{ak - \text{th}(ak)} + \frac{\text{sh}(kx)}{ak \cdot \text{ch}(ak) - \text{sh}(ak)} \right] \\ h_{8(x)} &= \frac{a}{2} \left[ \frac{1}{ak \cdot \text{th}(ak)} - \frac{x \cdot \text{th}(ak)}{a[ak - \text{th}(ak)]} - \frac{\text{ch}(kx)}{ak \cdot \text{sh}(ak)} + \frac{\text{sh}(kx)}{ak \cdot \text{ch}(ak) - \text{sh}(ak)} \right] \\ h_{9(x)} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{kx}{ak - \text{th}(ak)} - \frac{\text{sh}(kx)}{ak \cdot \text{ch}(ak) - \text{sh}(ak)} \right] \\ h_{10(x)} &= \frac{a}{2} \left[ -\frac{1}{ak \cdot \text{th}(ak)} - \frac{x \cdot \text{th}(ak)}{a[ak - \text{th}(ak)]} + \frac{\text{ch}(kx)}{ak \cdot \text{sh}(ak)} + \frac{\text{sh}(kx)}{ak \cdot \text{ch}(ak) - \text{sh}(ak)} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

A l'aide des fonctions interpolatrices qu'on vient de voir, on peut finalement discrétiser la configuration courante  $\gamma_n$  (figure 4.1). Comme  $\gamma_n$  est décrite dans la configuration de référence  $\Gamma_n$  qui passe par sa corde, on a:

$$V_1 = W_1 = V_2 = W_2 = 0 \quad (4.19)$$

donc, la configuration courante  $\gamma_n$  est donnée par:

$$\begin{aligned} u_{(x)} &= h_1 U_1 + h_2 U_2 \\ v_{(x)} &= h_4 \theta_{z1} + h_6 \theta_{z2} \\ w_{(x)} &= -h_4 \theta_{y1} - h_6 \theta_{y2} \\ \psi_{(x)} &= h_7 \psi_1 + h_8 \theta_{\psi 1} + h_9 \psi_2 + h_{10} \theta_{\psi 2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

#### IV - L'élément fini de poutre spatiale

Par contre les incréments de déplacements entre la configuration  $\gamma_{n+1}$  et la configuration courante  $\gamma_n$  dans les axes de référence de  $\Gamma_n$  sont donnés par:

$$\begin{aligned} du_{(x)} &= h_1 dU_1 + h_2 dU_2 \\ dv_{(x)} &= h_3 dV_1 + h_4 d\theta_{z1} + h_5 dV_2 + h_6 d\theta_{z2} \\ dw_{(x)} &= h_3 dW_1 - h_4 d\theta_{y1} + h_5 dW_2 - h_6 d\theta_{y2} \\ d\psi_{(x)} &= h_7 d\psi_1 + h_8 d\theta_{\psi1} + h_9 d\psi_2 + h_{10} d\theta_{\psi2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

#### 4.3.3. Les tenseurs de déformations et de contraintes

Les développements de de VILLE [69] lors de l'élaboration de son élément fini de poutre spatiale avec les hypothèses déjà citées au paragraphe 4.1 conduisent au tenseur de déformations qu'il a qualifié de type MARGUERRE et qui est donné par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} E_{XXM} &= \varepsilon_{XX} + e_{XXM} - y\chi_{ZM} - z\chi_{YM} \\ 2E_{XYM} &= -(z - z_c + \omega_{,y}^c) \psi' \\ 2E_{XZM} &= (y - y_c - \omega_{,z}^c) \psi' \\ E_{YYM} &= E_{ZZM} = E_{YZM} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{XX} &= u' - yv'' - zw'' - \omega^c \psi'' \\ e_{XXM} &= \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2 + r_c^2 \psi'^2) + z_c \psi' v' - y_c \psi' w' \\ \chi_{YM} &= -v'' \psi \quad ; \quad \chi_{ZM} = w'' \psi \end{aligned} \quad (4.23)$$

où:

$$r_c^2 = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad (4.24)$$

$( )'$  : dérivée par rapport à  $x$ ;

$( )_{,y}$  : dérivée partielle par rapport à  $y$ ;

$( )_{,z}$  : dérivée partielle par rapport à  $z$ ;

De VILLE montre dans sa thèse que l'utilisation du tenseur de déformations tel qu'il est formulé en (4.22) présente les effets de 'membrane locking' et de 'bending locking'. Afin de créer un élément fini de poutre spatiale performant, il propose le tenseur de déformations suivant qui supprime le 'membrane locking' et le 'bending locking' et qu'il qualifie de type MARGUERRE Modifié:

$$\begin{aligned} E_{XXMM} &= \varepsilon_{XX} + e_{XXMM} - y\chi_{ZMM} - z\chi_{YMM} \\ E_{XYMM} &= E_{XYM} \end{aligned}$$

$$E_{XZMM} = E_{XZM} \quad (4.25)$$

avec:

$$\begin{aligned} e_{XXMM} &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} e_{XXM} \, dx \\ \chi_{YMM} &= \frac{3x}{2a^3} \int_{-a}^{+a} x \chi_{YM} \, dx + \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \chi_{YM} \, dx \\ \chi_{ZMM} &= \frac{3x}{2a^3} \int_{-a}^{+a} x \chi_{ZM} \, dx + \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \chi_{ZM} \, dx \end{aligned} \quad (4.26)$$

Avec l'état de déformations donné par (4.25), on peut obtenir l'état de contraintes d'un point quelconque de la poutre par la loi de HOOKE, si on est en élasticité:

$$\begin{aligned} S_{XX} &= E \cdot E_{XXMM} \\ S_{XY} &= 2G \cdot E_{XYMM} \\ S_{XZ} &= 2G \cdot E_{XZMM} \end{aligned} \quad (4.27)$$

L'élimination du 'membrane locking' et du 'bending locking' n'est pas la seule condition pour créer un élément fini performant. Il reste encore à vérifier que les modes rigides sont correctement pris en compte. En d'autres termes, il faut que les variations  $\delta E_{ijMM}$  soient nulles pour tous les modes rigides possibles de déplacement de l'élément fini dans l'espace. En plus, ce fait garantit que les efforts internes énergétiquement équivalents sont en équilibre entre eux. Tous calculs fait, de VILLE obtient de nouvelles expressions pour les variations de (4.25).

$$\begin{aligned} \delta E_{XXMM}^* &= \delta E_{XXMM} - \frac{z_p}{2a} (\psi_2 \delta \theta_{z2} - \psi_1 \delta \theta_{z1}) - \frac{y_p}{2a} (\psi_2 \delta \theta_{y2} - \psi_1 \delta \theta_{y1}) \\ &\quad - y \left[ \frac{3x}{2a^2} (\theta_{y2} \delta \psi_2 + \theta_{y1} \delta \psi_1) + \frac{1}{2a} (\theta_{y2} \delta \psi_2 - \theta_{y1} \delta \psi_1) \right] \\ &\quad - z \left[ \frac{3x}{2a^2} (\theta_{z2} \delta \psi_2 + \theta_{z1} \delta \psi_1) + \frac{1}{2a} (\theta_{z2} \delta \psi_2 - \theta_{z1} \delta \psi_1) \right] \\ \delta E_{XYMM}^* &= \delta E_{XYMM} \quad ; \quad \delta E_{XZMM}^* = \delta E_{XZMM} \end{aligned} \quad (4.28)$$

#### 4.3.4. Les efforts internes énergétiquement équivalents

Tout comme pour les paramètres nodaux de déplacements, les efforts internes énergétiquement équivalents sont en nombre de 14, c'est à dire, 7 à chaque noeud comme le montre la figure 4.4. Il y en a six pour les forces ( $N_1, T_{y1}, T_{z1} - N_2, T_{y2}, T_{z2}$ ), six pour les moments ( $M_{t1}, M_{y1}, M_{z1} - M_{t2}, M_{y2}, M_{z2}$ ) et deux pour le bi-moment ( $B_{\omega1} - B_{\omega2}$ ).

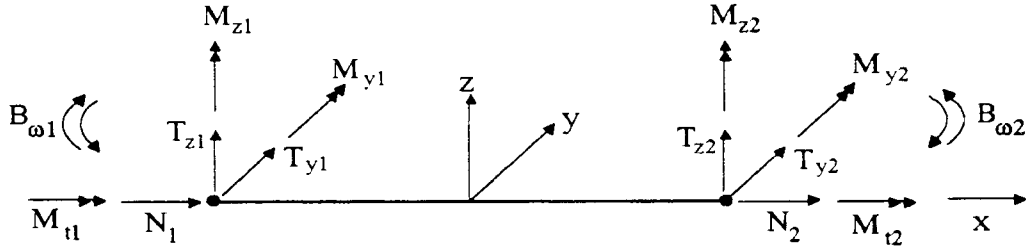


Figure 4.4- Les efforts internes énergétiquement équivalents.

En combinant les équations (4.1) et (4.28), on peut réécrire le principe des travaux virtuels qui exprime l'équilibre de la configuration courante  $\gamma_n$  dans les axes corotationnels de la configuration de référence  $\Gamma_n$ , permettant ainsi de trouver les efforts internes:

$$\int_V \left[ S_{XX} \delta E_{XXMM}^* + 2S_{XY} \delta E_{XYMM}^* + 2S_{XZ} \delta E_{XZMM}^* \right] \cdot dV = \\ = N_i \delta U_i + T_{yi} \delta V_i + T_{zi} \delta W_i + M_{ti} \delta \psi_i + M_{yi} \delta \theta_{yi} + M_{zi} \delta \theta_{zi} + B_{\omega i} \delta \theta_{\psi i} ; \quad i = 1, 2 \quad (4.29)$$

En combinant l'équation (4.29) avec les discrétisations de la configuration courante  $\gamma_n$  (4.20) et les variations du champ de déplacements (4.21), après avoir substitué  $\delta$  à  $d$ , qui apparaissent dans les variations  $\delta E_{ijMM}^*$ , on trouve les efforts internes énergétiquement équivalents dans les axes corotationnels de la configuration de référence  $\Gamma_n$ , donnés par les expressions suivantes:

$$N_1 = \int_V S_{XX} h_1' dV = -\bar{N}$$

$$T_{y1} = \int_V -y S_{XX} h_3'' dV + \bar{N} \left[ \int_L v' h_3' dx + z_c \int_L \psi' h_3' dx \right] + \Sigma \bar{M}_y \int_L \psi h_3'' dx + \frac{\Delta \bar{M}_y}{2a} \int_L x \psi h_3'' dx$$

$$T_{z1} = \int_V -z S_{XX} h_3'' dV + \bar{N} \left[ \int_L w' h_3' dx - y_c \int_L \psi' h_3' dx \right] + \Sigma \bar{M}_z \int_L \psi h_3'' dx + \frac{\Delta \bar{M}_z}{2a} \int_L x \psi h_3'' dx$$

$$M_{t1} = \int_V -\omega^c S_{XX} h_7'' dV + \int_V \left[ S_{XZ} (y - y_c - \omega_{z,y}^c) - S_{XY} (z - z_c + \omega_{y,z}^c) \right] h_7' dV$$

$$+ \bar{N} \left[ z_c \int_L v' h_7' dx - y_c \int_L w' h_7' dx \right] + \bar{M}_{trc} \int_L \psi' h_7' dx$$

$$+ \Sigma \bar{M}_z \int_L w'' h_7 dx + \frac{\Delta \bar{M}_z}{2a} \int_L x w'' h_7 dx - \{ \bar{M}_{z1} \theta_{y1} \}$$

$$+ \Sigma \bar{M}_y \int_L v'' h_7 dx + \frac{\Delta \bar{M}_y}{2a} \int_L x v'' h_7 dx + \{ \bar{M}_{y1} \theta_{z1} \}$$



$$\begin{aligned}
 M_{y1} &= \int_V z S_{XX} h_4'' dV - \bar{N} \left[ \int_L w' h_4' dx - y_c \int_L \psi' h_4' dx \right] \\
 &\quad - \Sigma \bar{M}_z \int_L \psi h_4'' dx - \frac{\Delta \bar{M}_z}{2a} \int_L x \psi h_4'' dx + \{ \bar{N} y_c \psi_1 \} \\
 M_{z1} &= \int_V -y S_{XX} h_4'' dV + \bar{N} \left[ \int_L v' h_4' dx + z_c \int_L \psi' h_4' dx \right] \\
 &\quad + \Sigma \bar{M}_y \int_L \psi h_4'' dx + \frac{\Delta \bar{M}_y}{2a} \int_L x \psi h_4'' dx + \{ \bar{N} z_c \psi_1 \} \\
 B_{\omega 1} &= \int_V -\omega^c S_{XX} h_8'' dV + \bar{N} \left[ z_c \int_L v' h_8' dx - y_c \int_L w' h_8' dx \right] + \bar{M}_{trc} \int_L \psi' h_8' dx \\
 &\quad + \Sigma \bar{M}_z \int_L w'' h_8 dx + \frac{\Delta \bar{M}_z}{2a} \int_L x w'' h_8 dx + \Sigma \bar{M}_y \int_L v'' h_8 dx + \frac{\Delta \bar{M}_y}{2a} \int_L x v'' h_8 dx \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= \frac{1}{2a} \int_V S_{XX} dV \quad ; \quad \bar{M}_{trc} = \frac{1}{2a} \int_V S_{XX} \cdot r_c^2 \cdot dV \\
 \bar{M}_{y(x)} &= \frac{1}{2a} \int_V z S_{XX} dV + \frac{3x}{2a^3} \int_V xz S_{XX} dV \\
 &= (\bar{M}_{y1} + \bar{M}_{y2})/2 + (\bar{M}_{y2} - \bar{M}_{y1})x/2a = \Sigma \bar{M}_y + \Delta \bar{M}_y x/2a \\
 \bar{M}_{z(x)} &= -\frac{1}{2a} \int_V y S_{XX} dV - \frac{3x}{2a^3} \int_V xy S_{XX} dV \\
 &= (\bar{M}_{z1} + \bar{M}_{z2})/2 + (\bar{M}_{z2} - \bar{M}_{z1})x/2a = \Sigma \bar{M}_z + \Delta \bar{M}_z x/2a \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Les expressions au noeud 2, équivalentes à (4.30), sont obtenues en remplaçant  $h_1$  par  $h_2$ ,  $h_i$  par  $h_{i+2}$  pour les autres fonctions interpolatrices et  $[\psi_1, \theta_{y1}, \theta_{z1}, \bar{M}_{y1}, \bar{M}_{z1}]$  par  $[(-\psi_2), (-\theta_{y2}), (-\theta_{z2}), \bar{M}_{y2}, \bar{M}_{z2}]$ .

#### 4.3.5. La matrice de rigidité tangente

La matrice de rigidité tangente de l'élément fini est dépendante de la configuration courante  $\gamma_n$  et est telle qu'elle permet d'obtenir les incréments de déplacements  $d\mathbf{p}$  entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$  pour un incrément de la charge  $d\mathbf{P}$ , tous rapportés aux axes corotationnels de la configuration de référence  $\Gamma_n$ . Elle peut être obtenue par le principe des travaux virtuels sous la forme incrémentielle donnée en (4.2). En y substituant  $\delta E_{ijMM}^*$  donné en (4.28) à  $\delta E_{ij}$ , et en n'y retenant que les termes non nuls, on obtient:

$$\int_V \left[ dS_{XX} \delta E_{XXMM}^* + 2dS_{XY} \delta E_{XYMM}^* + 2dS_{XZ} \delta E_{XZMM}^* + S_{XX} \delta dE_{XXMM}^* \right] \cdot dV = \\ = \delta \underline{p}^T \underline{K}_t d\underline{p} = \delta \underline{p}^T d\underline{p} \quad (4.32)$$

avec:

$$d\underline{p} = \left\langle dU_1, dV_1, dW_1, d\psi_1, d\theta_{y1}, d\theta_{z1}, d\theta_{\psi1} \mid dU_2, dV_2, dW_2, d\psi_2, d\theta_{y2}, d\theta_{z2}, d\theta_{\psi2} \right\rangle^T \quad (4.33)$$

La loi constitutive incrémentielle du matériau donne pour les incréments de contraintes, les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} dS_{XX} &= E_t \cdot dE_{XXMM}^* \\ dS_{XY} &= 2G \cdot dE_{XYMM}^* \\ dS_{XZ} &= 2G \cdot dE_{XZMM}^* \end{aligned} \quad (4.34)$$

où  $E_t$  est le module d'élasticité tangent de la courbe  $(\sigma \epsilon)$  de l'essai de traction sur des éprouvettes.

Quant à la variation  $\delta E_{XXMM}^*$ , elle peut être scindée en deux parties:

$$\delta E_{XXMM}^* = \delta \epsilon_{XX} + \delta e_{XXMM}^* \quad (4.35)$$

où  $\delta \epsilon_{XX}$  est la partie indépendante de la configuration courante  $\gamma_n$ , alors que  $\delta e_{XXMM}^*$  contient des termes linéairement dépendants des paramètres nodaux  $p_i$  définissant la déformée  $\gamma_n$ , équations (4.20). Ainsi fait, la matrice tangente peut être scindée en quatre parties:

$$\underline{K}_t = \underline{K}_0 + \underline{K}_{UMM} + \underline{K}_{U2MM} + \underline{K}_{SMM} \quad (4.36)$$

données par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \delta \underline{p}^t \underline{K}_0 d\underline{p} &= \int_V (\delta \epsilon_{XX} \cdot E_t \cdot d\epsilon_{XX} + 4 \cdot \delta \epsilon_{XY} \cdot G \cdot d\epsilon_{XY} + 4 \cdot \delta \epsilon_{XZ} \cdot G \cdot d\epsilon_{XZ}) \cdot dV \\ \delta \underline{p}^t \underline{K}_{UMM} d\underline{p} &= \int_V (\delta e_{XXMM}^* \cdot E_t \cdot d\epsilon_{XX} + \delta \epsilon_{XX} \cdot E_t \cdot de_{XXMM}^*) \cdot dV \\ \delta \underline{p}^t \underline{K}_{U2MM} d\underline{p} &= \int_V \delta e_{XXMM}^* \cdot E_t \cdot de_{XXMM}^* \cdot dV \\ \delta \underline{p}^t \underline{K}_{SMM} d\underline{p} &= \int_V S_{XX} \cdot \delta de_{XXMM}^* \cdot dV \end{aligned} \quad (4.37)$$

où  $\underline{K}_0$  est la matrice infinitésimale au 1er ordre,  $\underline{K}_{UMM}$  et  $\underline{K}_{U2MM}$  sont proportionnelles à  $p_i$  et à  $p_i^2$ , respectivement. La matrice  $\underline{K}_{SMM}$  est la matrice des contraintes initiales.

Il reste encore toutefois un problème à résoudre: la matrice  $\underline{K}_{SMM}$  est non symétrique. Pour exposer les raisons de cette dissymétrie, on peut donner une explication

mathématique et une interprétation physique. Mathématiquement, la non permutativité des opérations de différentiation et de variation de  $e_{XXMM}^*$ , c'est à dire,  $\delta de_{XXMM}^* \neq d\delta e_{XXMM}^*$  est à l'origine de cette dissymétrie, dont les responsables sont les termes supplémentaires qui ont été ajoutés à  $\delta E_{XXMM}$ , équations (4.28), afin de que les modes rigides soient correctement pris en compte.

Physiquement, cette dissymétrie s'explique par la non permutativité des rotations dans l'espace comme de VILLE le met en relief dans sa thèse de doctorat [69]. Cependant, on désire que les incréments de rotation soient suffisamment petits pour qu'on puisse les traiter comme des vecteurs. Si on choisit d'admettre que  $\gamma_{n+1}$  est très proche de  $\gamma_n$ , dès lors la règle d'additivité des rotations dans l'espace est rétablie. A cet effet, on peut formuler l'hypothèse suivante:

$$\underline{K}_{SMM}^* = \frac{1}{2}(\underline{K}_{SMM} + \underline{K}_{SMM}^T) \quad (4.38)$$

afin de que la matrice tangente soit symétrique.

#### **4.3.6. La matrice de connexion**

La continuité de déplacements entre deux éléments finis ne peut être assurée que si toutes les inconnues nodales se reportent à un seul point de la section nodale. Or, l'examen de la figure 4.2 et du champ de déplacements (4.4) montre que  $U_i$  est le déplacement axial au niveau du centre de gravité G, alors que  $V_i$  et  $W_i$  sont les déplacements transversaux au niveau du centre de torsion C. En ce qui concerne les rotations,  $\psi_i$  est la rotation axiale autour du centre de torsion C, alors que  $\theta_{yi}$  et  $\theta_{zi}$  sont les rotations autour des axes principaux d'inertie y et z. Quant au gauchissement  $\theta_{\psi i}$ , bien qu'il ne soit rattaché à aucun point particulier, on va le considérer rattaché au centre de gravité. Afin d'illustrer ces détails, la figure 4.5 montre les points de référence auxquels les inconnues nodales sont rattachées. On note que les lettres G et C ont été ajoutées à la notation des inconnues nodales afin de servir de rappel quant au point auquel elles sont rattachées. De même, les efforts internes associés aux inconnues nodales y sont aussi donnés avec la même notation.

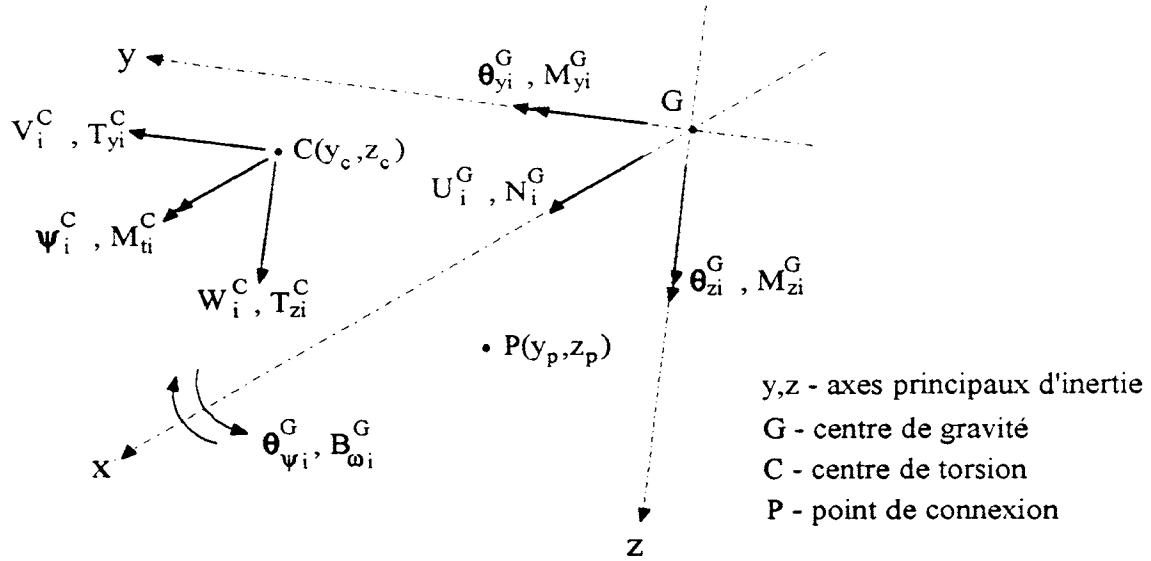


Figure 4.5- Points d'attache des inconnues nodales et des efforts internes.

Ainsi fait, les inconnues nodales et les efforts internes peuvent être notés de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 \underline{p}_{GC} &= \langle U_i^G, V_i^C, W_i^C, \psi_i^C, \theta_{yi}^G, \theta_{zi}^G, \theta_{\psi i}^G \rangle^T \\
 \underline{p}_{GC} &= \langle N_i^G, T_{yi}^C, T_{zi}^C, M_{\psi i}^C, M_{yi}^G, M_{zi}^G, B_{\omega i}^G \rangle^T
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

On a pu constater que les inconnues nodales et les efforts internes associés agissent en des points bien particuliers de la section nodale. Or, on cherche à qu'on puisse les rapportés tous à un seul point de connexion P quelconque de coordonnées  $(y_p, z_p)$ . Les déplacements transversaux du point P, notés  $(v^*, w^*)$ , ont pour expression:

$$\begin{aligned}
 v^* &= v - (z_p - z_c)\psi \\
 w^* &= w + (y_p - y_c)\psi
 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si maintenant on substitue les déplacements  $v$  et  $w$  obtenus à partir des expressions (4.40) dans les expressions linéarisées du champ de déplacements (4.4), données par:

$$\begin{aligned}
 U_{(x,y,z)} &= u - yv' - zw' - \omega^c \psi' \\
 V_{(x,y,z)} &= v - (z - z_c)\psi \\
 W_{(x,y,z)} &= w + (y - y_c)\psi
 \end{aligned} \quad (4.41)$$

on obtient:

$$U_{(x,y,z)} = u - yv^{*'} - zw^{*'} - \omega^* \psi'$$

$$V_{(x,y,z)} = v^* - (z - z_p)\psi$$

$$W_{(x,y,z)} = w^* + (y - y_p)\psi \quad (4.42)$$

avec:

$$\omega_{(y,z)}^* = \omega_{(y,z)}^c + y(z_p - z_c) - z(y_p - y_c) \quad (4.43)$$

Si on fait les substitutions suivantes:

$$\begin{aligned} v, w &\leftrightarrow v^*, w^* \\ \omega^c &\leftrightarrow \omega^* \\ (y - y_c), (z - z_c) &\leftrightarrow (y - y_p), (z - z_p) \end{aligned} \quad (4.44)$$

dans toute la formulation numérique de l'élément fini qu'on a déjà vue, on obtiendra les vecteurs des inconnues nodales et des efforts internes notés de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \underline{p}_{GP} &= \left\langle U_i^G, V_i^P, W_i^P, \psi_i^P, \theta_{yi}^G, \theta_{zi}^G, \theta_{\psi i}^G \right\rangle^T \\ \underline{P}_{GP} &= \left\langle N_i^G, T_{yi}^P, T_{zi}^P, M_{ti}^P, M_{yi}^G, M_{zi}^G, B_{\omega i}^G \right\rangle^T \end{aligned} \quad (4.45)$$

Il faut toutefois signaler que les substitutions (4.44), basées sur le champ de déplacement linéaire (4.41), sont valables si les rotations sont modérées, hypothèse de von Karman.

Si on avait toutes les inconnues nodales et tous les efforts internes ramenés au seul point P, ils seraient écrits avec la notation suivante:

$$\begin{aligned} \underline{p}_P &= \left\langle U_i^P, V_i^P, W_i^P, \psi_i^P, \theta_{yi}^P, \theta_{zi}^P, \theta_{\psi i}^P \right\rangle^T \\ \underline{P}_P &= \left\langle N_i^P, T_{yi}^P, T_{zi}^P, M_{ti}^P, M_{yi}^P, M_{zi}^P, B_{\omega i}^P \right\rangle^T \end{aligned} \quad (4.46)$$

Afin de ramener le point d'application des inconnues nodales au seul point P, il s'avère nécessaire de trouver la relation suivante:

$$\underline{p}_{GP} = \underline{CONEC} \cdot \underline{p}_P \quad (4.47)$$

Les termes de la matrice CONEC peuvent être déduits à partir des relations suivantes:

$$U_i^P = U_i^G - y_p \theta_{zi}^G + z_p \theta_{yi}^G - \left[ \omega_{(y_p, z_p)}^c + y_p(z_p - z_c) - z_p(y_p - y_c) \right] \theta_{\psi i}^G \quad (4.48a)$$

$$\theta_{yi}^P = \theta_{yi}^G \quad ; \quad \theta_{zi}^P = \theta_{zi}^G \quad ; \quad \theta_{\psi i}^P = \theta_{\psi i}^G \quad (4.48b)$$

#### IV - L'élément fini de poutre spatiale

Donc, la matrice CONEC s'écrit:

$$\underline{\text{CONEC}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_p & y_p & \omega_{(y_p, z_p)}^c - y_p z_c + z_p y_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Quant au terme  $\omega_{(y_p, z_p)}^c$ , la valeur de la fonction de gauchissement au point P, de VILLE le néglige dans la matrice de connexion. Pour le lecteur intéressé, les motifs qui l'ont conduit à négliger ce terme sont exposés dans sa thèse de doctorat [69]. Donc, la matrice de connexion utilisée est bien celle montrée en (4.49) en négligeant le terme  $\omega_{(y_p, z_p)}^c$ .

La matrice de rigidité avec les inconnues nodales et les efforts internes donnés en (4.45) s'écrit:

$$\delta \underline{p}_{GP}^T \underline{K}_{GP} \underline{p}_{GP} = \delta \underline{p}_{GP}^T \underline{P}_{GP} \quad (4.50)$$

En combinant les équations (4.47) et (4.50), on trouve:

$$\delta \underline{p}_P^T \underline{C}^T \underline{K}_{GP} \underline{C} \underline{p}_P = \delta \underline{p}_P^T \underline{C}^T \underline{P}_{GP} \quad (4.51)$$

avec:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{\text{CONEC}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\text{CONEC}} \end{bmatrix}_{14 \times 14} \quad (4.52)$$

En comparant avec la matrice de rigidité connectée en un point quelconque:

$$\delta \underline{p}_P^T \underline{K}_P \underline{p}_P = \delta \underline{p}_P^T \underline{P}_P \quad (4.53)$$

On trouve finalement les relations suivantes:

$$\underline{K}_P = \underline{C}^T \underline{K}_{GP} \underline{C} \quad ; \quad \underline{P}_P = \underline{C}^T \underline{P}_{GP} \quad (4.54)$$

#### 4.3.7. Les caractéristiques géométriques en torsion

##### 4.3.7.1. La fonction de gauchissement

Dans ce travail, on a utilisé la fonction de gauchissement  $\omega_{(y,z)}^c$  proposée originalement par de VILLE [69] pour les *sections ouvertes à parois minces*. Comme sa formule est écrite dans les axes curvilignes (s,t) définis sur la ligne moyenne de la section transversale, figure 4.6, il est tout d'abord nécessaire d'en éclaircir la convention utilisée.

- a) L'origine de l'axe s est telle que les points extrêmes de la section, 1 et 2, possèdent les coordonnées s suivantes:

$$s_1 = -s_2 = p/2 \quad (4.55)$$

où p est le périmètre de la section;

- b) La distance  $r_s^A$  du point A à la tangente à la section en F est positive si pour une rotation axiale positive le point F se déplace dans le sens positif de l'axe s, sinon  $r_s^A$  est négative. Au contraire, la distance  $r_t^A$  du point A à la normale à la section en F est positive si pour une rotation axiale positive le point F se déplace dans le sens négatif de l'axe t, sinon  $r_t^A$  est négative.

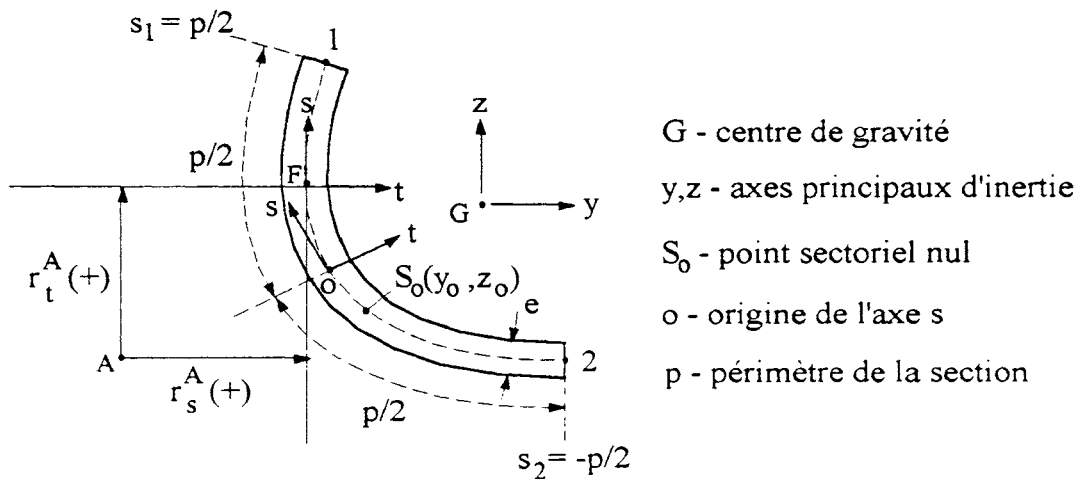


Figure 4.6- Géométrie des axes curvilignes.

De VILLE propose la formule suivante pour le calcul de la fonction de gauchissement par rapport à un point A quelconque:

#### IV - L'élément fini de poutre spatiale

$$\omega_{(s,t)}^A = t \left( \frac{2 \cdot \text{sh}(\mu s)}{\mu \cdot \text{ch}(\mu p/2)} - s \right) + (s - r_t^A) \cdot t + \int_0^{s-s_0} r_s^A ds \quad (4.56)$$

avec:

$$\mu^2 = 12/e^2 \quad (4.57)$$

où  $e$  est l'épaisseur de la paroi et  $s_0$  est la coordonnée  $s$  du point sectoriel nul  $S_0$  de coordonnées  $(y_0, z_0)$  - voir figure 4.6.

On note que les deux premiers termes concernent la variation du gauchissement sur l'épaisseur de la paroi, alors que le dernier terme représente l'aire sectorielle de VLASSOV. Pour obtenir (4.56), de VILLE a adopté l'hypothèse que la courbure de la paroi peut être négligée, donc:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{d^2 z}{ds^2} = 0 \quad (4.58)$$

avec:

$$y = y(s) \quad ; \quad z = z(s) \quad (4.59)$$

De VILLE montre aussi que les formules trouvées par VLASSOV [68] pour le calcul de la position du centre de torsion et la formule pour le changement de pôle restent tout aussi valables avec la nouvelle définition (4.56) de la fonction de gauchissement. Donc, la position du centre de torsion, ainsi que la fonction  $\omega_{(s,t)}^C$  peuvent être trouvées par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} z_c &= z_A - \frac{I_{\omega^A y}}{I_z} \\ y_c &= y_A + \frac{I_{\omega^A z}}{I_y} \\ \omega_{(s,t)}^C &= \omega_{(s,t)}^A + (z_c - z_A)(y_{(s,t)} - y_0) - (y_c - y_A)(z_{(s,t)} - z_0) \end{aligned} \quad (4.60)$$

avec:

$$\begin{aligned} I_{\omega^A y} &= \int_A \omega_{(s,t)}^A \cdot y_{(s,t)} \cdot dA \quad ; \quad I_{\omega^A z} = \int_A \omega_{(s,t)}^A \cdot z_{(s,t)} \cdot dA \\ I_z &= \int_A y_{(s,t)}^2 \cdot dA \quad ; \quad I_y = \int_A z_{(s,t)}^2 \cdot dA \end{aligned} \quad (4.61)$$

où  $y$  et  $z$  sont les axes principaux d'inertie passant par le centre de gravité  $G$  comme montré dans la figure 4.6.



Eu égard aux transformations (4.44) pour ramener les déplacements transversaux au point P, l'inertie en gauchissement par rapport au point P est donnée par:

$$I_{\omega P} = \int_A (\omega^*)^2 dA \quad (4.62)$$

En y remplaçant  $\omega^*$  par sa formule (4.43), on trouve:

$$I_{\omega P} = I_{\omega C} + (z_P - z_C)^2 I_z + (y_P - y_C)^2 I_y \quad (4.63)$$

avec:

$$I_{\omega C} = \int_A (\omega^C)^2 dA \quad (4.64)$$

Il est utile de dire que dans l'expression (4.15) du coefficient k des fonctions hyperboliques (4.18), il faut prendre l'expression suivante:

$$k^2 = \frac{GC_T}{EI_{\omega P}} \quad (4.65)$$

#### 4.3.7.2. L'inertie en torsion

L'inertie en torsion de Saint Venant déduite à partir du principe des travaux virtuels s'écrit:

$$C_T^A = \int_A (r_s^A + t - \omega_s^A)^2 + (r_t^A + \omega_t^A)^2 dA \quad (4.66)$$

On peut prouver très aisément que la formule (4.66) reste inaltérée pour n'importe quel point par rapport auquel elle est calculée. Si B est un autre point quelconque de coordonnées  $(y_B, z_B)$ , à l'aide des relations suivantes:

$$\begin{aligned} \omega_{(s,t)}^A &= \omega_{(s,t)}^B + (z_A - z_B)(y_{(s,t)} - y_0) - (y_A - y_B)(z_{(s,t)} - z_0) \\ r_s^A &= -(z - z_A) \frac{dy}{ds} + (y - y_A) \frac{dz}{ds} \quad ; \quad r_s^B = -(z - z_B) \frac{dy}{ds} + (y - y_B) \frac{dz}{ds} \\ r_t^A &= (y - y_A) \frac{dy}{ds} + (z - z_A) \frac{dz}{ds} \quad ; \quad r_t^B = (y - y_B) \frac{dy}{ds} + (z - z_B) \frac{dz}{ds} \\ y &= y(s) \quad ; \quad z = z(s) \quad ; \quad y_{(s,t)} = y + t \frac{dz}{ds} \quad ; \quad z_{(s,t)} = z - t \frac{dy}{ds} \end{aligned} \quad (4.67)$$

et de l'hypothèse (4.58), on trouve que:

$$\begin{aligned} (r_s^A + t - \omega_s^A) &= (r_s^B + t - \omega_s^B) \\ (r_t^A + \omega_t^A) &= (r_t^B + \omega_t^B) \end{aligned} \quad (4.68)$$

donc, on a finalement que:

$$C_T = C_T^A = C_T^B \quad (4.69)$$

En effet, dans une section ouverte à parois minces, les contraintes tangentielles dues uniquement au moment de torsion de Saint Venant:

$$M_{t)SV} = GC_T \psi' \quad (4.70)$$

sont des couples conjugués et en conséquence  $M_{t)SV}$  doit aussi rester inaltéré pour n'importe quel point par rapport auquel on applique le principe des travaux virtuels pour trouver l'inertie en torsion.

Si maintenant, on se reporte aux équations (4.30) des efforts internes, on note qu'il apparaît le terme suivant dans le calcul du moment de torsion  $M_{t1}$ :

$$\int_V \left[ S_{XZ} (y - y_c - \omega_{,z}^c) - S_{XY} (z - z_c + \omega_{,y}^c) \right] \cdot h_7 \cdot dV \quad (4.71)$$

En y remplaçant les contraintes données par (4.27) avec (4.22), on trouve:

$$G \int_A \left( y - y_c - \omega_{,z}^c \right)^2 + \left( z - z_c + \omega_{,y}^c \right)^2 dA \cdot \int_{-a}^a \psi' h_7 dx \quad (4.72)$$

L'intégrale sur l'aire qui apparaît en (4.72) n'est d'autre que l'inertie en torsion à la seule différence du changement du système d'axes dans lequel on écrit  $C_T$ , donc:

$$C_T = C_T^C = \int_A \left( y - y_c - \omega_{,z}^c \right)^2 + \left( z - z_c + \omega_{,y}^c \right)^2 dA \quad (4.73)$$

En combinant (4.73) avec les transformations (4.44) qui ramènent les déplacements transversaux au point P, on trouve:

$$C_T = C_T^P = \int_A \left( y - y_p - \omega_{,z}^* \right)^2 + \left( z - z_p + \omega_{,y}^* \right)^2 dA \quad (4.74)$$

En examinant les expressions de  $\omega^*$  et de  $\omega^P$ :

$$\omega^* = \omega^c + (z_p - z_c) \cdot y - (y_p - y_c) \cdot z \quad (4.43)$$

$$\omega^P = \omega^c + (z_p - z_c) \cdot (y - y_o) - (y_p - y_c) \cdot (z - z_o) \quad (4.75)$$

on s'aperçoit qu'on peut substituer  $\omega^P$  à  $\omega^*$  en (4.74) sans que sa valeur soit altérée puisque ce sont les dérivées de  $\omega^*$  qui apparaissent en (4.74). Ce fait valide la première égalité de (4.74).

En conclusion, l'utilisation de la formule (4.66) calculée par rapport à un point A arbitraire reste tout à fait valable. L'auteur a aussi pu vérifier que le calcul de (4.66) par voie numérique est en très bon accord avec la formule suivante pour le calcul de l'inertie en torsion de sections ouvertes profilées à froid:

$$C_T = \sum_{i=1}^N \frac{b_i e^3}{3} \quad (4.76)$$

où N est le nombre de plaques composant la section et  $b_i$  est la largeur individuelle des plaques.

#### **4.3.8. La plasticité**

Comme déjà dit au paragraphe 2.7 de cette thèse, on a décidé de considérer l'effet de plasticité dans la programmation de l'élément fini afin de pouvoir simuler la rotule plastique qui se forme au milieu de la colonne lors de sa ruine. Malgré le fait que les largeurs effectives ont dû rester inchangées dès le début de la plastification dans l'élément fini, la prise en compte de la plasticité sert déjà à pénaliser la rigidité des barres les plus faibles de la structure formée par des profils à parois minces dont on veut obtenir la charge de ruine.

Quant au calcul en plasticité dans l'élément fini de poutre spatiale, on a adopté les hypothèses reprises par de VILLE [69] telles que: théorie incrémentielle de la plasticité dans le domaine de petites déformations avec une loi constitutive élasto-plastique à écrouissage linéaire. L'écrouissage est isotrope et la loi est uniaxiale.

### **4.4. L'ELEMENT FINI A SECTION TRANSVERSALE VARIABLE**

#### **4.4.1. La variation de la section transversale**

Vu que l'on a adopté la méthode de largeurs effectives pour la prise en compte du voilement de la section, ses largeurs doivent être mis à jour à chaque itération du pas non linéaire selon l'évolution des contraintes dans l'élément fini. Ainsi, on a un passage de la section pleine à la section effective à partir du début du voilement et une variation de la section effective avec le voilement progressif de la section, figure 4.7a.

Les figures 4.7b et 4.7c montrent la répartition de largeurs effectives et de points d'intégration pour la plaque appuyée sur deux bords et pour la plaque appuyée sur un seul bord, respectivement. On note que la largeur plane de la plaque appuyée sur deux bords a la seule possibilité de se scinder en deux morceaux effectifs ( $b_{e1}$  et  $b_{e2}$  ou  $b_{e1}$  et  $b_{e2} + b_t$ ), alors que pour la plaque appuyée sur un seul bord, elle peut soit se scinder en deux morceaux effectifs ( $b_e$  et  $b_t$ ), soit ne se réduire qu'à un seul morceau effectif ( $b_e$  ou  $b_t + b_e$ ), (voir aussi figure 2.40 et tableau 2.4).

Quant à l'intégration numérique sur la plaque, on se contente de 3 points d'intégration sur l'épaisseur, alors que dans la largeur de la plaque on a établi un minimum de 4 points d'intégration ( $k \geq 4$ ). La répartition des points d'intégration sur les largeurs effectives est faite selon les règles suivantes:

#### IV - L'élément fini de poutre spatiale

- a) Les points d'intégration sont répartis proportionnellement aux largeurs des deux morceaux effectifs;
- b) Chaque morceau effectif doit avoir un minimum de 2 points d'intégration ( $m \geq 2$  et  $n \geq 2$ ).

Quant aux arrondis, on a utilisé 3 points d'intégration sur la ligne moyenne et 3 points d'intégration sur l'épaisseur, comme le montre la figure 4.7e.

En plus du calcul normal des contraintes longitudinales sur les points d'intégration, on les calcule aussi sur les bords intérieurs et sur les bords extérieurs des morceaux effectifs comme montré à la figure 4.7d. Les contraintes sur les bords sont calculées sur la section L de l'élément fini, voir figure 4.7f, choisie par l'utilisateur pour le calcul des largeurs effectives de l'élément fini.

Quant à la discrétisation d'une barre en éléments finis, de VILLE [69] préconise que 2 à 3 éléments finis par barre sont suffisants pour obtenir un bon résultat numérique, avec son élément fini. Cependant, on a pu constater que lorsque la section transversale de chaque élément fini est variable, il faut veiller à qu'il n'y ait pas une très grande discontinuité des caractéristiques géométriques de la section effective à la jonction de deux éléments finis. Ainsi, le tableau 4.1 montre le nombre d'éléments finis qui ont été nécessaires pour la discrétisation des types de profils qu'on a essayés dans cette thèse.

La colonne de la variable Iter affichée sur ce tableau est le nombre de premières itérations de chaque pas dans lesquelles on met à jour les largeurs effectives. Dans les itérations suivantes de chaque pas, les largeurs effectives restent inchangées. Le motif pour lequel on ne fait varier les largeurs effectives que sur les premières itérations de chaque pas, est qu'on obtient pratiquement le même résultat si on les fait varier sur un nombre plus grand d'itérations que celui indiqué au tableau 4.1 ou si on les fait varier sur toutes les itérations. Ainsi, on obtient un bon résultat avec un minimum d'effort de calcul. On reviendra plus en détail sur ce sujet au chapitre 5 des résultats de cette thèse.

Profil	Discrétisation Nombre d'éléments finis	Iter
Cornière et profil U	5	6
Profil C	4	2

Tableau 4.1- Discrétisation et nombre d'itérations (Iter) de chaque pas dans lesquels on fait varier les largeurs effectives.

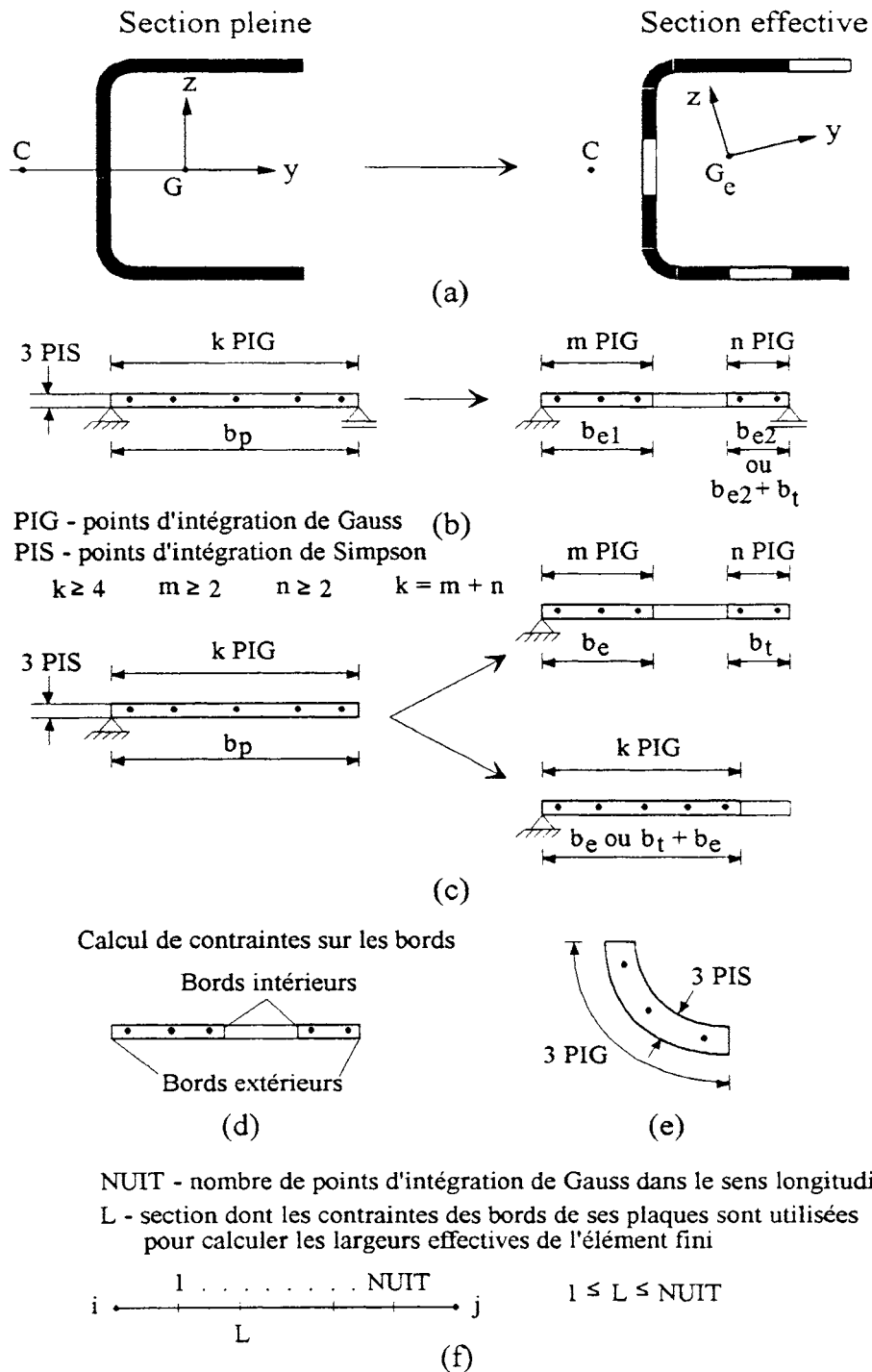


Figure 4.7- La variation de la section transversale dans l'élément fini.

- (a) Section pleine et section effective;
- (b) Plaque appuyée sur deux bords;
- (c) Plaque appuyée sur un seul bord;
- (d) Les bords intérieurs et extérieurs des largeurs effectives;
- (e) Arrondis;
- (f) Section utilisée pour calculer les largeurs effectives.

#### 4.4.2. Actualisation de la matrice de rotation et de la déformée courante

Le but de ce paragraphe est d'expliquer le calcul fait pour trouver la matrice de rotation et la déformée courante de  $\gamma_{n+1}$  à partir de la matrice de rotation et de la déformée courante de  $\gamma_n$ , et des incréments de déplacements entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$ . Tout d'abord, la variation de la section transversale n'est pas encore prise en compte. Cependant, on a préféré mettre ce paragraphe dans le cadre de l'élément fini à section transversale variable afin qu'on puisse donner de la continuité du raisonnement du paragraphe suivant où on explique les calculs supplémentaires nécessaires pour tenir compte du déplacement du centre de gravité et du changement d'orientation des axes principaux d'inertie lorsque la section transversale est variable.

La déformée courante de l'élément fini de poutre spatiale peut être définie par les variables suivantes:

$$\begin{aligned} &\Delta u_P ; \Delta u_G \\ &\psi_1, \theta_{y1}, \theta_{z1}, \theta_{\psi1}, \psi_2, \theta_{y2}, \theta_{z2}, \theta_{\psi2} \end{aligned} \quad (4.77)$$

où  $\Delta u_P$  et  $\Delta u_G$  sont les allongements au niveau du point de connexion P et au niveau du centre de gravité, respectivement. La variable  $\Delta u_P$  n'apparaît pas dans les développements de l'élément fini, mais elle a été introduite ici afin de faciliter l'exposé. Il est aussi utile de rappeler que le système d'axe corotationnel est celui qui est situé aux points de connexion situés aux sections nodales de l'élément fini et qui est parallèle aux axes principaux centraux d'inertie.

La figure 4.8, tirée de la référence [69], aidera à comprendre la mise à jour de  $\Delta u_P$ ,  $\Delta u_G$  et de la matrice de rotation de l'élément fini. Sur cette figure, on a translaté  $\Gamma_n$  de telle manière que les points de connexion  $P_1$  de  $\Gamma_n$  et de  $\Gamma_{n+1}$  soient confondus.

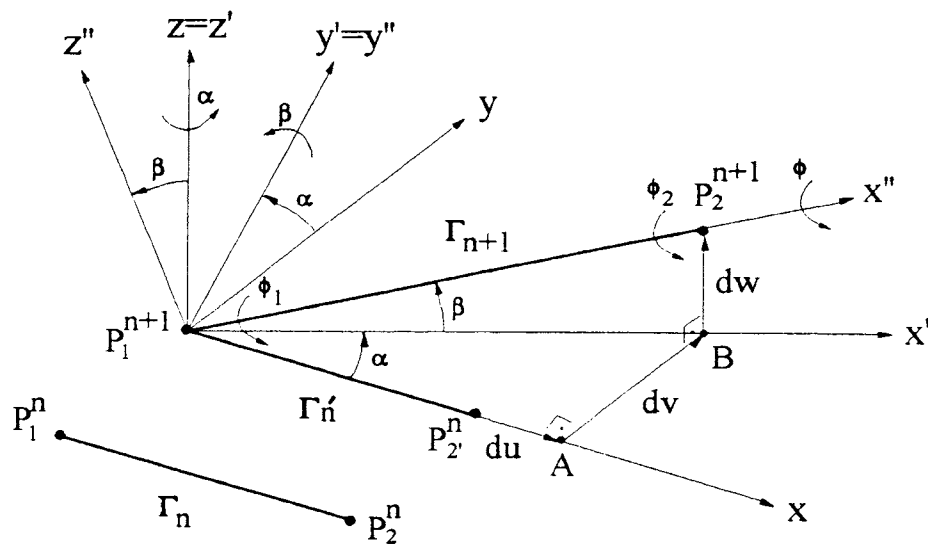


Figure 4.8- Détails géométriques pour le calcul de  $\Delta u_P$  et de la matrice de rotation.

Le calcul de  $\Delta u_P)_{\gamma_{n+1}}$  se déroule avec les étapes suivantes:

a) Calcul de la longueur  $\overline{P_1^n P_2^n}$ :

$$\overline{P_1^n P_2^n} = 2 \cdot a + \Delta u_P)_{\gamma_n} \quad (4.78)$$

b) Calcul des incréments de déplacements relatifs entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $\Gamma_n$ :

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \underline{ROT}_{\Gamma_n} \{u_{j+7} - u_j\}_{3 \times 1} \quad j = 1 \text{ à } 3 \quad (4.79)$$

où  $\underline{ROT}_{\Gamma_n}$  est la matrice de rotation de  $\Gamma_n$  et  $u_j$  sont les incréments de déplacements dans les axes globaux.

c) Calcul de la longueur  $\overline{P_1^{n+1} P_2^{n+1}}$ :

$$\overline{P_1^{n+1} P_2^{n+1}} = \left[ \left( \overline{P_1^n P_2^n} + du \right)^2 + dv^2 + dw^2 \right]^{1/2} = \overline{P_1^n P_2^n} \cdot (1+q)^{1/2} \quad (4.80)$$

avec:

$$q = \frac{2 \cdot du}{\overline{P_1^n P_2^n}} + \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{\overline{P_1^n P_2^n}^2} \quad (4.81)$$

d) Calcul de  $\Delta u_P)_{\gamma_{n+1}}$ :

$$\Delta u_P)_{\gamma_{n+1}} = \overline{P_1^{n+1} P_2^{n+1}} - 2 \cdot a \quad (4.82)$$

Bien que le calcul par ordinateur soit fait en double précision, le calcul de (4.80) peut être très imprécis si  $q$  est très petit. On a constaté que si  $|q|$  est plus petit que  $10^{-5}$ , il faut calculer la racine carrée de (4.80) en la développant en série:

$$(1+q)^{1/2} \cong 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{16} - \dots \quad (4.83)$$

Le calcul de la matrice de rotation de  $\Gamma_{n+1}$  est basé sur la notion des trois angles d'Euler  $\alpha, \beta, \phi$  montrés à la figure 4.8. Son calcul se déroule avec les étapes suivantes:

a) Calculer les angles  $\alpha$  et  $\beta$  de rotation autour des axes  $z$  et  $y'$ , respectivement:

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctg \left[ dv / \left( \overline{P_1^n P_2^n} + du \right) \right] \rightarrow \underline{ROT}\alpha \\ \beta &= \arctg \left( dw / \overline{P_1^{n+1} B} \right) \rightarrow \underline{ROT}\beta\end{aligned}\quad (4.84)$$

Il est utile de remarquer que pour le calcul de  $\overline{P_1^{n+1} B}$ , il faut prendre la même précaution que à l'étape 'c' du calcul de  $\Delta u_P)_{\gamma_{n+1}}$ ;

b) Calculer les incréments de rotation en torsion aux noeuds 1 et 2 dans l'axe longitudinal de  $\Gamma_{n+1}$ :

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \left\langle \underline{ROT}\beta \cdot \underline{ROT}\alpha \cdot \underline{ROT}_{\Gamma_n} \right\rangle_{1j} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_{x1} & \Theta_{x2} \\ \Theta_{y1} & \Theta_{y2} \\ \Theta_{z1} & \Theta_{z2} \end{bmatrix} \quad j = 1 \text{ à } 3 \quad (4.85)$$

où  $\Theta_{ij}$  sont les incréments de rotation entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$  dans les axes globaux.

c) Calculer l'incrément de rotation rigide en torsion entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$  donné par:

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \rightarrow \underline{ROT}\phi \quad (4.86)$$

d) Finalement, la matrice de rotation de  $\Gamma_{n+1}$  est calculée par:

$$\underline{ROT}_{\Gamma_{n+1}} = \underline{ROT}_n^{n+1} \cdot \underline{ROT}_{\Gamma_n} \quad (4.87)$$

avec:

$$\underline{ROT}_n^{n+1} = \underline{ROT}\phi \cdot \underline{ROT}\beta \cdot \underline{ROT}\alpha \quad (4.88)$$

Pour le calcul des rotations  $\psi$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  aux deux noeuds, on dispose de deux procédés qu'on applique successivement à chaque noeud:

Premier procédé:

a) Calculer les rotations à partir de  $\Gamma_n$  de la déformée  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $\Gamma_{n+1}$ :

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{matrix} \right\}_{\gamma_{n+1}, \Gamma_n | \Gamma_{n+1}} = \underline{ROT}_n^{n+1} \left\{ \begin{matrix} \psi \\ \theta_y \\ \theta_z \end{matrix} \right\}_{\gamma_n, \Gamma_n | \Gamma_n} + \underline{ROT}_{\Gamma_{n+1}} \left\{ \begin{matrix} \Theta_x \\ \Theta_y \\ \Theta_z \end{matrix} \right\} \quad (4.89)$$



où  $\langle \psi, \theta_y, \theta_z \rangle$  est la déformée courante de  $\gamma_n$  par rapport à sa corde dans les axes de  $\Gamma_n$  et  $\langle \Theta_x, \Theta_y, \Theta_z \rangle$  sont les incréments de rotation entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$  dans les axes globaux;

- b) Calculer les incréments de déplacements relatifs entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $\Gamma_{n+1}$  (voir figure 4.9):

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \underline{ROT}_{\Gamma_{n+1}} \{u_{j+7} - u_j\}_{3 \times 1} \quad j = 1 \text{ à } 3 \quad (4.90)$$

où  $u_j$  sont les incréments de déplacements dans les axes globaux;

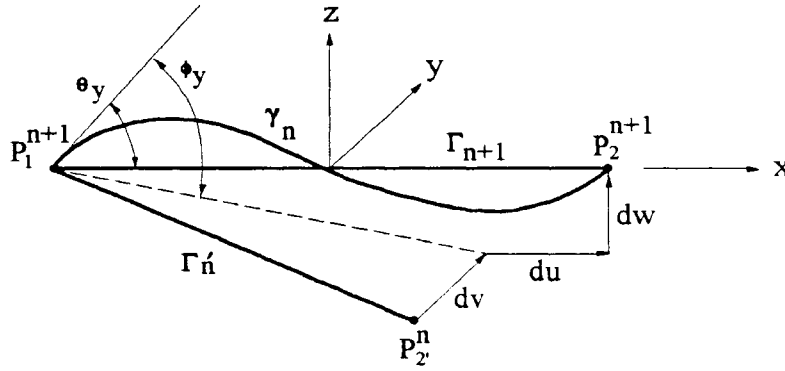


Figure 4.9- Détails géométriques pour le calcul de la pente  $\theta_y$ .

- c) Calculer les rotations  $\theta_y$  et  $\theta_z$  à partir de  $\Gamma_{n+1}$  de la déformée de  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $\Gamma_{n+1}$  (voir figure 4.9):

$$\begin{aligned} \theta_y &= \phi_y + \arctg \left[ dw / \left( \overline{P_1^{n+1} P_2^{n+1}} - du \right) \right] \\ \theta_z &= \phi_z - \arctg \left[ dv / \left( \overline{P_1^{n+1} P_2^{n+1}} - du \right) \right] \end{aligned} \quad (4.91)$$

- d) La rotation en torsion  $\psi$  à partir de  $\Gamma_{n+1}$  de la déformée de  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $\Gamma_{n+1}$  est donnée par:

$$\psi = \phi_x - \phi \quad (4.92)$$

où  $\phi$  est donné par l'expression (4.86).

Quant au deuxième procédé, il est présenté ici de manière très succincte. Pour le lecteur intéressé, une explication plus approfondie de ce procédé peut être trouvée dans la référence [69]. La démarche à suivre est la suivante:

- a) Calculer les rotations à partir de  $\Gamma_n$  de la déformée  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $\Gamma_n$ :

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix}_{\gamma_{n+1}, \Gamma_n | \Gamma_n} = \begin{Bmatrix} \psi \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_{\gamma_n, \Gamma_n | \Gamma_n} + \underline{\text{ROT}}_{\Gamma_n} \begin{Bmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \\ \Theta_z \end{Bmatrix} \quad (4.93)$$

- b) Dans l'hypothèse de petites déformations, les vecteurs unitaires normaux à la déformée  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $\Gamma_n$  prennent la forme suivante:

$$\bar{n}_{1,n} = \langle \phi_z, -1, 0 \rangle \quad ; \quad \bar{n}_{2,n} = \langle -\phi_y, 0, -1 \rangle \quad (4.94)$$

- c) Si on écrivait les vecteurs unitaires normaux à la déformée  $\gamma_{n+1}$  en se rapportant aux axes de  $\Gamma_{n+1}$ , ils auraient la forme suivante:

$$\bar{n}_{1,n+1} = \langle \theta_z, -1, 0 \rangle \quad ; \quad \bar{n}_{2,n+1} = \langle -\theta_y, 0, -1 \rangle \quad (4.95)$$

où  $\theta_y$  et  $\theta_z$  sont les angles cherchés;

- d) Or, les vecteurs (4.94) et (4.95) sont les mêmes à la seule différence près qu'ils sont écrits en deux systèmes d'axes différents. Donc, ils sont liés par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \theta_z & -\theta_y \\ -A & C \\ B & -D \end{bmatrix}_{\Gamma_{n+1}} = \underline{\text{ROT}}_n^{n+1} \begin{bmatrix} \phi_z & -\phi_y \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{\Gamma_n} \quad (4.96)$$

où A et D sont proches de l'unité et, C et B sont proches de zéro si les pentes de  $\gamma_{n+1}$  restent faibles vis à vis de l'unité;

- e) Quant au calcul de  $\psi$ , il est identique à celui présenté pour le premier procédé.

Puisque cette deuxième méthode est basée sur une approximation mathématique, elle n'est utilisable que si les pentes  $\theta_y$  et  $\theta_z$  sont petites. Malgré cela, elle assure une convergence plus rapide de l'élément fini. De VILLE [69] propose une valeur limite maximum de 0,2 radians de  $\theta_y$  et  $\theta_z$  pour son utilisation. Lorsque cette valeur est dépassée, on passe à la première méthode.

Quant au calcul de l'amplitude de gauchissement, comme le bi-moment est un effort auto-équilibré, il est traité comme un scalaire, donc:

$$\theta_\psi \Big|_{\gamma_{n+1}} = \theta_\psi \Big|_{\gamma_n} + d\theta_\psi \quad (4.97)$$

où  $d\theta_\psi$  est l'incrément de l'amplitude de gauchissement entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$ .

Finalement, l'allongement de l'élément fini au niveau du centre de gravité est donné par la formule suivante (voir équation 4.48a):

$$\begin{aligned} \Delta u_G)_{\gamma_{n+1}} = \Delta u_P)_{\gamma_{n+1}} &+ [y_P \theta_{z2} - z_P \theta_{y2} + (-y_P z_C + z_P y_C) \theta_{\psi 2}] \\ &- [y_P \theta_{z1} - z_P \theta_{y1} + (-y_P z_C + z_P y_C) \theta_{\psi 1}] \end{aligned} \quad (4.98)$$

#### 4.4.3. Correction de la matrice de rotation et de la déformée courante

Si la section transversale était constante, il ne faudrait effectuer que les calculs exposés au paragraphe antécédent. Cependant, lorsque la section transversale est variable, le centre de gravité de la section effective se déplace et l'orientation des axes principaux d'inertie change d'un angle  $\alpha_{dif}$  par rapport aux axes principaux d'inertie de la section effective de l'itération précédente, comme illustré à la figure 4.10. A cause de ces faits, il s'avère nécessaire d'effectuer quelques opérations supplémentaires afin de corriger la matrice de rotation et la déformée courante trouvées dans le paragraphe 4.4.2.

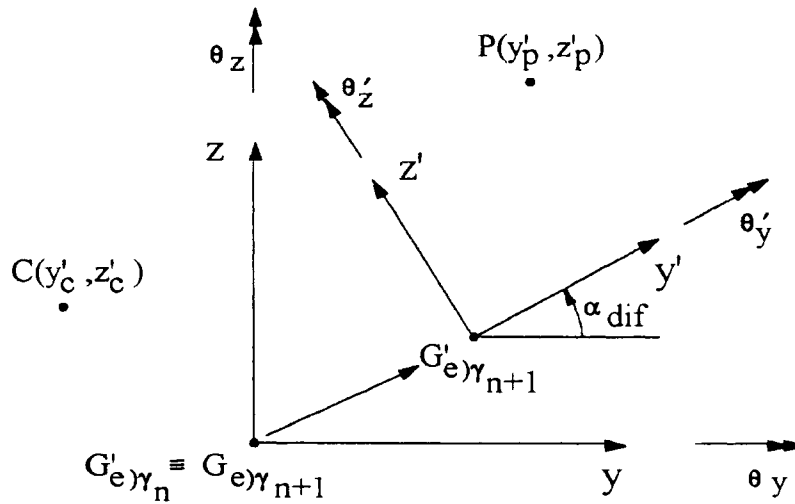


Figure 4.10- Changement d'axes de la section effective.

Les corrections à faire sont les suivantes:

- a) Calculer la nouvelle matrice de rotation de l'élément fini:

$$\underline{ROT}_{\Gamma'_{n+1}} = \underline{ROT}_{\alpha_{dif}} \cdot \underline{ROT}_{\Gamma_{n+1}} \quad (4.99)$$

- b) En chaque noeud, calculer les pentes  $\theta'_y$  et  $\theta'_z$ :

$$\begin{Bmatrix} \theta'_y \\ \theta'_z \end{Bmatrix}_{\Gamma'_{n+1}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{dif}) & \sin(\alpha_{dif}) \\ -\sin(\alpha_{dif}) & \cos(\alpha_{dif}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_{\Gamma_{n+1}} \quad (4.100)$$

c) Recalculer l'allongement au niveau du centre de gravité de la nouvelle section effective:

$$\begin{aligned} \Delta u_G)_{\gamma_{n+1}} = \Delta u_P)_{\gamma_{n+1}} &+ \left[ y'_p \theta'_{z2} - z'_p \theta'_{y2} + (-y_p z_c + z_p y_c) \theta_{\psi 2} \right] \\ &- \left[ y'_p \theta'_{z1} - z'_p \theta'_{y1} + (-y_p z_c + z_p y_c) \theta_{\psi 1} \right] \end{aligned} \quad (4.101)$$

où  $(y'_p, z'_p)$  sont les coordonnées du point de connexion par rapport aux axes principaux d'inertie de la nouvelle section effective et ;  $(y_p, z_p)$  et  $(y_c, z_c)$  sont les coordonnées du point de connexion et du centre de torsion, respectivement, par rapport aux axes principaux d'inertie de la section pleine;

d) Quant aux autres variables qui définissent la déformée courante (4.77), elles ne subissent aucune correction.

Ainsi, la matrice de rigidité et les efforts internes rapportés aux axes globaux sont donnés par:

$$\underline{K}_{GL} = \underline{R}^T \cdot \underline{K}_P \cdot \underline{R} \quad ; \quad \underline{P}_{GL} = \underline{R}^T \cdot \underline{P}_P \quad (4.102)$$

avec:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{ROT}_{\Gamma'_{n+1}} & \underline{0} & \underline{0} & & & \\ \underline{0} & \underline{ROT}_{\Gamma'_{n+1}} & \underline{0} & & \underline{0} & \\ \underline{0} & \underline{0} & 1 & & & \\ & & & \underline{ROT}_{\Gamma'_{n+1}} & \underline{0} & \underline{0} \\ & \underline{0} & & \underline{0} & \underline{ROT}_{\Gamma'_{n+1}} & \underline{0} \\ & & & \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

où  $\underline{K}_P$  et  $\underline{P}_P$  sont donnés par les relations (4.54) avec  $\underline{K}_{GP}$  et  $\underline{P}_{GP}$  calculées en substituant  $y'_p$  à  $y_p$  et  $z'_p$  à  $z_p$ . La matrice CONEC de cette relation est alors donnée par:

$$\underline{\text{CONEC}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z'_p & y'_p & -y_p z_c + z_p y_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

#### 4.4.4. Les caractéristiques géométriques

Malgré le fait que la section transversale soit variable, on a considéré que le centre de torsion et le point sectoriel nul de la section transversale restent fixes. Ainsi, la distribution de la fonction de gauchissement sur la section reste inchangée. En effet, du point de vue théorique, considérer le centre de torsion de la section pleine dont la position ne coïncide pas avec celle du centre de torsion de la section effective est une approximation. Par contre, il faut aussi dire que faire varier la section transversale de l'élément fini est déjà, par lui-même, une approximation théorique. Donc, il n'y a rien qu'on puisse dire pour mettre en cause l'hypothèse adoptée de considérer les positions du centre de torsion et du point sectoriel nul constantes. En plus, comme on le verra dans le chapitre 5 des résultats de cette thèse, on a obtenu une bonne corrélation théorique-expérimentale pour les profils dont le flambement est par flexion torsion.

Suite à l'hypothèse faite, si la forme de la fonction de gauchissement  $\omega_{(y,z)}^c$  reste inaltérée, la forme de la transformation  $\omega_{(y,z)}^*$  donnée par:

$$\omega_{(y,z)}^* = \omega_{(y,z)}^c + y(z_p - z_c) - z(y_p - y_c) \quad (4.43')$$

doit aussi rester inaltérée. C'est pourquoi, dans les expressions (4.101) et (4.104), les termes qui se rapportent au gauchissement restent aussi inaltérés.

Le tenseur des déformations (4.22), combiné avec les substitutions (4.44), s'écrit pour l'élément fini avec les axes principaux d'inertie de la section effective de centre de gravité  $G'_e \gamma_{n+1}$ , figure 4.10:

$$\begin{aligned} E_{XXM} &= \varepsilon_{XX} + e_{XXM} - y' \chi_{ZM} - z' \chi_{YM} \\ 2E_{XYM} &= -(z' - z'_p + \omega_{,y}^*) \psi' \\ 2E_{XZM} &= (y' - y'_p - \omega_{,z}^*) \psi' \end{aligned} \quad (4.105)$$

#### IV - L'élément fini de poutre spatiale

avec:

$$\varepsilon_{XX} = u' - y'v^{*''} - z'w^{*''} - \omega^* \psi''$$

$$e_{XXM} = \frac{1}{2}(v^{*'}^2 + w^{*'}^2 + r_p'^2 \psi'^2) + z'_p \psi' v^{*'} - y'_p \psi' w^{*'}$$

$$\chi_{YM} = -v^{*''} \psi \quad ; \quad \chi_{ZM} = w^{*''} \psi$$

$$r_p'^2 = (y' - y'_p)^2 + (z' - z'_p)^2 \quad (4.106)$$

En régime élastique, on peut distinguer les caractéristiques géométriques suivantes qui apparaissent dans la matrice de rigidité de l'élément fini:

$$A = \int_{A_e} dA \quad ; \quad I_y = \int_{A_e} z'^2 dA \quad ; \quad I_z = \int_{A_e} y'^2 dA$$

$$I_{yr2} = \int_{A_e} y' r'^2 dA \quad ; \quad I_{zr2} = \int_{A_e} z' r'^2 dA \quad ; \quad I_{\omega cr2} = \int_{A_e} \omega^c r'^2 dA$$

$$I_{\omega c} = \int_{A_e} (\omega^c)^2 dA \quad ; \quad I_{r4} = \int_{A_e} r'^4 dA \quad ; \quad r'^2 = y'^2 + z'^2$$

$$C_T = \int_{A_e} \left\{ \left[ 2t \left( 1 - \frac{\text{ch}(\mu s)}{\text{ch}(\mu p/2)} \right) \right]^2 + \left[ 2 \frac{\text{sh}(\mu s)}{\mu \cdot \text{ch}(\mu p/2)} \right]^2 \right\} \cdot dA \quad (4.107)$$

$$I_{\omega p} = \int_{A_e} (\omega^*)^2 dA = I_{\omega c} + (z'_p - z'_c)^2 I_z + (y'_p - y'_c)^2 I_y$$

$$I_{\omega py} = \int_{A_e} \omega^* y' dA = (z'_p - z'_c) I_z \quad ; \quad I_{\omega pz} = \int_{A_e} \omega^* z' dA = -(y'_p - y'_c) I_y$$

$$I_{rp2} = \int_{A_e} r_p'^2 dA = I_y + I_z + (y_p'^2 + z_p'^2) A$$

$$I_{yrp} = \int_{A_e} y' r_p'^2 dA = I_{yr2} - 2y'_p I_z \quad ; \quad I_{zrp} = \int_{A_e} z' r_p'^2 dA = I_{zr2} - 2z'_p I_y$$

$$I_{\omega rp} = \int_{A_e} \omega^* r_p'^2 dA = I_{\omega cr2} + (z'_p - z'_c)(I_{yr2} - 2I_z y'_p) - (y'_p - y'_c)(I_{zr2} - 2I_y z'_p)$$

$$I_{rp4} = \int_{A_e} r_p'^4 dA = I_{r4} - 4I_{yr2} y'_p - 4I_{zr2} z'_p + (6y_p'^2 + 2z_p'^2) I_z + (6z_p'^2 + 2y_p'^2) I_y + (y_p'^2 + z_p'^2)^2 A \quad (4.108)$$

où l'inertie en torsion,  $C_T$ , est le développement de l'équation (4.66) et  $A_e$  est l'aire de la section effective.

Les caractéristiques géométriques (4.107) sont recalculées numériquement dans les 'Iter' premières itérations du pas non linéaire pour la nouvelle section effective. On rappelle que l'intégration numérique ne concerne que les morceaux effectifs de la section. Ainsi, on peut simuler la perte de rigidité du profil dû au voilement à travers une pénalisation de ses caractéristiques géométriques. Quant aux caractéristiques géométriques (4.108), elles sont dépendantes des caractéristiques (4.107) et donc, subissent la même pénalisation.

L'hypothèse que la fonction de gauchissement devrait rester inchangée, pose quelques problèmes lors du calcul de certaines caractéristiques géométriques. Par exemple, pour le calcul de  $I_{\omega p}$  on a:

$$\begin{aligned} I_{\omega p} &= \int_{A_e} (\omega^*)^2 dA = \int_{A_e} \left[ \omega_{(y,z)}^c + y(z_p - z_c) - z(y_p - y_c) \right]^2 dA = \\ &= \int_{A_e} (\omega^c)^2 dA + (z_p - z_c)^2 \int_{A_e} y^2 dA + (y_p - y_c)^2 \int_{A_e} z^2 dA \end{aligned} \quad (4.109)$$

Comme on peut le voir dans l'expression ci-dessus, on utilise y et z des axes principaux d'inertie de la section pleine, alors qu'on veut effectuer les calculs de l'élément fini pour la section effective. Afin qu'il y ait une *plus grande* cohérence entre les caractéristiques géométriques en torsion et la section effective, on a adopté, par hypothèse, l'expression suivante de  $\omega_{(y,z)}^*$ :

$$\omega_{(y,z)}^* = \omega_{(y,z)}^c + y'(z'_p - z'_c) - z'(y'_p - y'_c) \quad (4.110)$$

pour le calcul des caractéristiques géométriques  $I_{\omega p}$ ,  $I_{\omega py}$ ,  $I_{\omega pz}$  et  $I_{\omega rp}$ , tel qu'on le voit en (4.108).

En plus, lors du calcul de  $I_{\omega p}$ ,  $I_{\omega py}$ ,  $I_{\omega pz}$  et  $I_{\omega rp}$ , on a considéré que les égalités suivantes sont valides:

$$\int_{A_e} \omega_{(y,z)}^c dA = 0 \quad ; \quad \int_{A_e} \omega_{(y,z)}^c y' dA = 0 \quad ; \quad \int_{A_e} \omega_{(y,z)}^c z' dA = 0 \quad (4.111)$$

Malgré que l'on sache que  $\omega_{(y,z)}^c$  n'est orthogonale qu'à y et z calculés dans les axes principaux d'inertie de la section pleine et avec intégration sur l'aire de la section pleine, les intégrales (4.111) sont négligées par hypothèse. En effet, on a constaté que les résultats obtenus restent pratiquement inchangés si on prend en compte la non-nullité des intégrales (4.111) lorsque le flambement est par flexion-torsion.

Quant aux fonctions hyperboliques (4.18), elles sont calculées avec le coefficient k donné par (4.65) qui est calculé avec les caractéristiques géométriques de la section pleine. Ces fonctions hyperboliques restent inchangées par hypothèse.

En plasticité, comme déjà dit au paragraphe 2.7, la section effective de l'élément fini reste inchangée dès le début de plastification de cet élément. Donc, pour le calcul plastique, l'intégration numérique de la matrice de rigidité se déroule sur la dernière section effective qu'on avait avant que commence la plastification.

#### **4.4.5. Organigramme de calcul**

Afin de rendre plus claire l'introduction de la section effective variable dans l'élément fini, on a décidé d'inclure un paragraphe pour présenter l'organigramme général pour le calcul de la matrice de rigidité et des efforts internes de l'élément fini lors de l'élaboration du programme FINLOC. Le calcul de la déformée  $\gamma_{n+1}$  à partir de la déformée  $\gamma_n$  et des incréments de déplacements entre  $\gamma_n$  et  $\gamma_{n+1}$  se déroule avec les étapes suivantes:

- a) Calcul de la matrice de rotation et de la déformée courante de  $\gamma_{n+1}$  dans les axes de  $G_e\gamma_{n+1}$  de la figure 4.10 selon le paragraphe 4.4.2;
- b) Cette étape concerne le calcul de la nouvelle section effective et elle n'est exécutée que si les conditions suivantes sont satisfaites:
  - Le calcul en voilement est demandé par l'utilisateur.
  - La plastification n'a pas encore eu lieu dans l'élément fini.
  - Si la variable Iter est plus petite ou égale à la valeur indiquée au tableau 4.1 pour chaque type de profil.

La démarche à suivre est la suivante:

- b.1) Calcul des contraintes longitudinales aux bords des plaques, figure 4.7d, avec la déformée courante calculée dans l'étape a;
- b.2) Avec les contraintes aux bords des plaques, on calcule les largeurs effectives selon l'une des méthodes proposées au paragraphe 2.6;
- b.3) Ces largeurs effectives composent la nouvelle section transversale, axes de  $G'_e\gamma_{n+1}$  de la figure 4.10, pour laquelle on calcule les nouvelles caractéristiques géométriques, paragraphe 4.4.4;
- b.4) On effectue les corrections sur la matrice de rotation et sur la déformée courante, paragraphe 4.4.3;
- c) Calcul des contraintes aux points d'intégration avec la déformée courante corrigée;
- d) Intégration numérique des termes de contraintes qui apparaissent dans la matrice de contraintes initiales et dans les efforts internes;
- e) Calcul de la matrice de rigidité tangente et des efforts internes dans les axes locaux;
- f) On effectue le passage de la matrice de rigidité tangente et des efforts internes vers les axes globaux au moyen des relations (4.54) et (4.102);



- g) Assemblage de la matrice de rigidité tangente et des efforts internes de l'élément fini à la matrice de rigidité tangente de la structure et au vecteur de forces avec lesquelles la structure est en équilibre, respectivement.

#### **4.5. UN TEST NUMERIQUE - LE CADRE DE LEE**

Afin de tester le programme FINLOC, développé spécialement pour cette thèse, on a étudié le cadre de LEE montré à la figure 4.11a. Cette figure montre les caractéristiques géométriques et mécaniques. Il s'agit d'un cadre rectangulaire bi-articulé, soumis à une charge concentrée située à 1/5 de la portée horizontale, provoquant un claquement. Ce problème a été résolu analytiquement par LEE, MANUEL et ROSSOW [80].

On a résolu la structure avec 10 éléments finis de poutre spatiale à section rectangulaire. La méthode utilisée pour la solution du problème non-linéaire est le pas sphérique avec stratégie automatique de chargement [81]. Les courbes (P,u) et (P,v) de la charge en fonction des déplacements de son point d'application sont données à la figure 4.11b. Les points 'a' à 'e' correspondants à diverses déformées du cadre sont représentées sur la figure 4.11a. La solution analytique n'est pas dessinée, mais est en excellent accord avec la solution numérique obtenue.

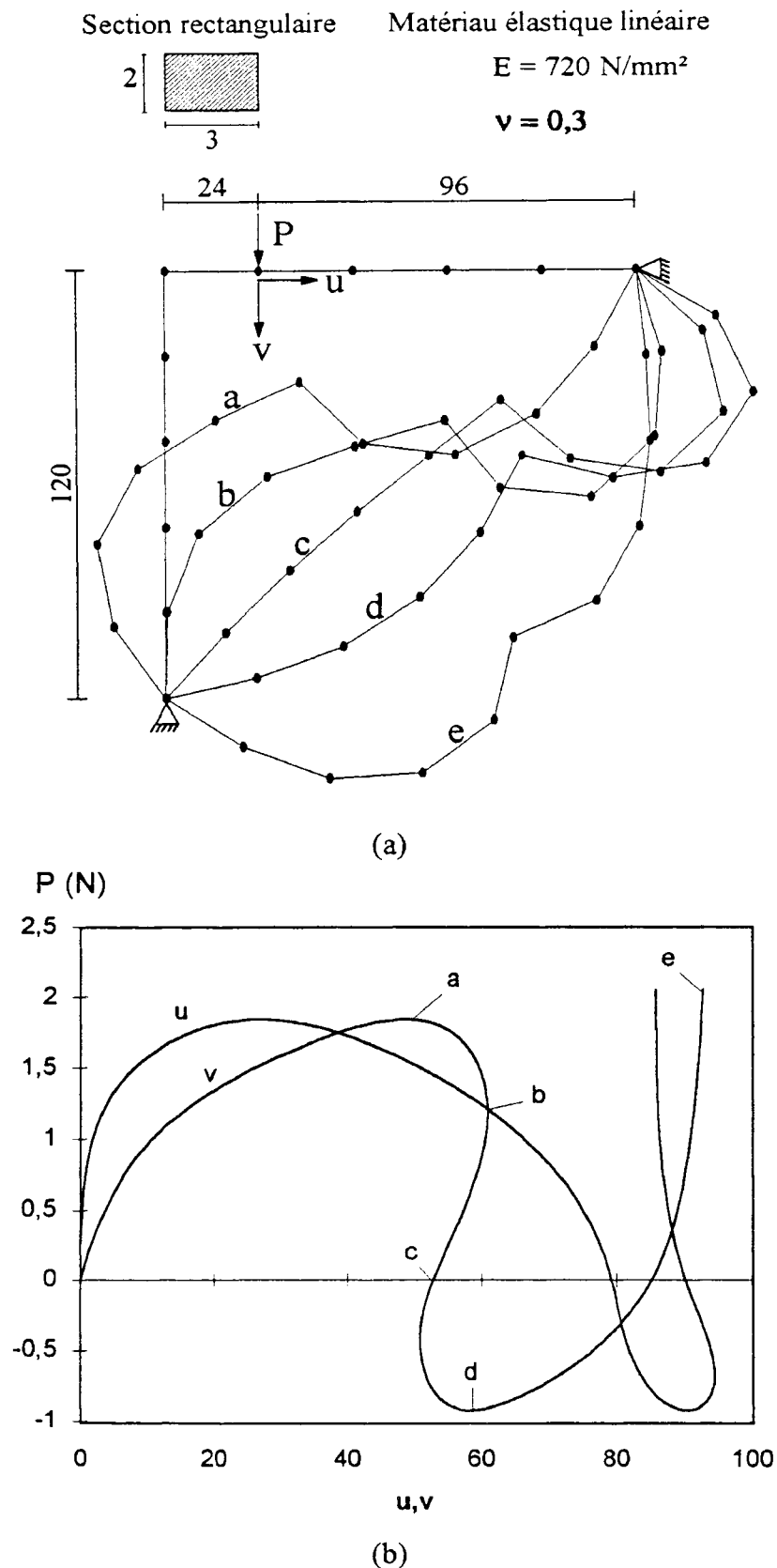


Figure 4.11 - Cadre de LEE, les dimensions et les déplacements sont en millimètres.

- (a) Caractéristiques géométriques et mécaniques, et déformées;  
 (b) Courbes de déplacement du point d'application de la charge.

# CHAPITRE 5

## RESULTATS

5.1. INTRODUCTION	5.1
5.2. CORNIERE	5.4
5.2.1. Introduction	5.4
5.2.2. Tronçon court	5.5
5.2.3. Tronçon long	5.7
5.2.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine	5.13
5.3. PROFIL U	5.21
5.3.1. Introduction	5.21
5.3.2. Tronçon court	5.22
5.3.3. Tronçon long	5.26
5.3.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine	5.34
5.4. PROFIL C	5.38
5.4.1. Introduction	5.38
5.4.2. Tronçon court	5.43
5.4.3. Tronçon long	5.47
5.4.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine	5.59
5.5. CONCLUSIONS	5.66

# RESULTATS

## 5.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à comparer les résultats expérimentaux des essais de compression centrée et excentrée de poutres-colonnes constituées par des profils à parois minces, tel que la cornière, le profil U et le profil C, avec les résultats numériques trouvés par élément fini de poutre spatiale avec section variable pour la prise en compte du voilement de ses parois au moyen de la méthode des largeurs effectives, programme FINLOC. On trouve aussi dans ce chapitre des illustrations de la visualisation en 3-D des déformées des profils étudiés. Ces dessins sont faits par le post-processeur graphique, programme DRAWLOC, spécialement développé pour cette thèse.

Pour chaque type de profil on étudie le comportement de tronçons courts et de tronçons longs. Pour les tronçons longs on a aussi envisagé une étude de l'influence de la déformée initiale sur la charge de ruine selon le type de flambement global de la pièce.

Afin de ne pas être trop répétitif dans l'exposé de ce chapitre, on va présenter dans cette introduction quelques détails qui sont valables pour tous les types de profils qui sont étudié dans ce chapitre:

- a) Lorsqu'on calcul numériquement la charge de ruine avec voilement pris en compte, eu égard au critère de ruine adopté, la ruine peut se produire en deux circonstances distinctes: soit la ruine se passe en régime élastique où le chemin post-critique devient instable sans que la plastification ait encore eu lieu, soit la ruine est limitée au début de plastification de la pièce. Ce deuxième critère est justifié par deux faits: on n'a pas réussi à simuler numériquement le comportement post-critique instable dû à la rotule plastique qui se forme au milieu de la colonne car les largeurs effectives ont dû rester inchangées en régime plastique, d'une part, et le critère de plastification dû à von KARMAN pour les plaques isolées est largement accepté pour les profils à parois minces. Les sections sont considérées comme des associations de plaques où la plastification d'une de ses plaques et la formation du mécanisme plastique subséquent entraînent l'apparition d'une rotule plastique au milieu de la colonne;
- b) Lorsqu'on calcul numériquement la charge de ruine en négligeant le voilement, on néglige la réserve post-plastique. La charge de ruine est donnée pour le début de plastification. On a ainsi fait car le but n'est autre que comparer les charges de ruine en négligeant et en considérant le voilement pour le début de plastification de la colonne;
- c) Comme déjà dit dans la remarque 'a', le calcul en plasticité est nécessaire lorsque la ruine est dictée par le début de plastification. On a adopté pour l'acier une loi élastique-parfaitement plastique;

- d) Chaque profil est discrétisé avec le nombre d'éléments finis indiqués au tableau 4.1. Chaque élément fini possède 3 points d'intégration dans le sens longitudinal, NUIT=3, et les largeurs effectives sont calculées avec les contraintes de la section d'intégration située au milieu de l'élément,  $L=2$ , voir figure 4.7f. Le schéma de la discrétisation ainsi que les axes globaux sont montrés dans les figures 5.1a et 5.1b;
- e) Les largeurs effectives sont calculées selon les approches données au paragraphe 2.6, à savoir: Eurocode 3, AISI-90, AISI-90\*, proposition A et proposition B. Ces approches sont appliquées et comparées dans les cas où elles s'appliquent selon le type de profil;
- f) Quant aux conditions d'appui en torsion, on considère que les plateaux de la presse d'essai sont infiniment rigides, en empêchant ainsi tout gauchissement des sections aux extrémités,  $\theta_{\psi} = 0$ . En flexion, les plateaux sont empêchés de tourner lors des essais des tronçons courts et libres de tourner lors des essais des tronçons longs. Ainsi, le tableau 5.1 ci-dessous présente un résumé des conditions d'appui:

Condition d'appui:	En flexion	En torsion
Tronçon court	Bi-encasté	Bi-encasté
Tronçon long	Bi-appuyé	Bi-encasté

Tableau 5.1- Les conditions d'appui adoptées.

Pour les tronçons courts, les noeuds intermédiaires (non-appuyés) ont dû être empêchés de tourner en flexion et de gauchir afin d'éviter de l'instabilité numérique causée par de très petites discontinuités des largeurs effectives entre deux éléments finis;

- g) Sur tous les tableaux et sur tous les graphiques présentés dans ce chapitre, les dimensions sont données en millimètres (mm), les charges critiques et de ruine en Kilo Newtons (KN),  $P_f$  est la charge critique de flambement par flexion autour de l'axe faible,  $P_{ft}$  avec  $k_{33} = 1$  est la charge critique de flambement par flexion-torsion avec le gauchissement libre aux extrémités, tandis que  $P_{ft}$  avec  $k_{33} = 4$  est avec le gauchissement empêché aux extrémités, voir équations (3.21);
- h) Lors de l'étude de l'influence de la déformée initiale sur la charge de ruine, de l'étude des tronçons courts de cornières et des études des tronçons longs des profils U et C, la déformée initiale est de type sinusoïdal et les flèches sont mises dans les sens y et z des axes principaux d'inertie. La flèche initiale est positive si elle pointe dans le sens positif de l'axe y. Quant à l'axe z, peu importe le signe de la flèche selon cet axe car il est perpendiculaire à l'axe de symétrie de la section (axe y), voir figures 5.1c et 5.1d.

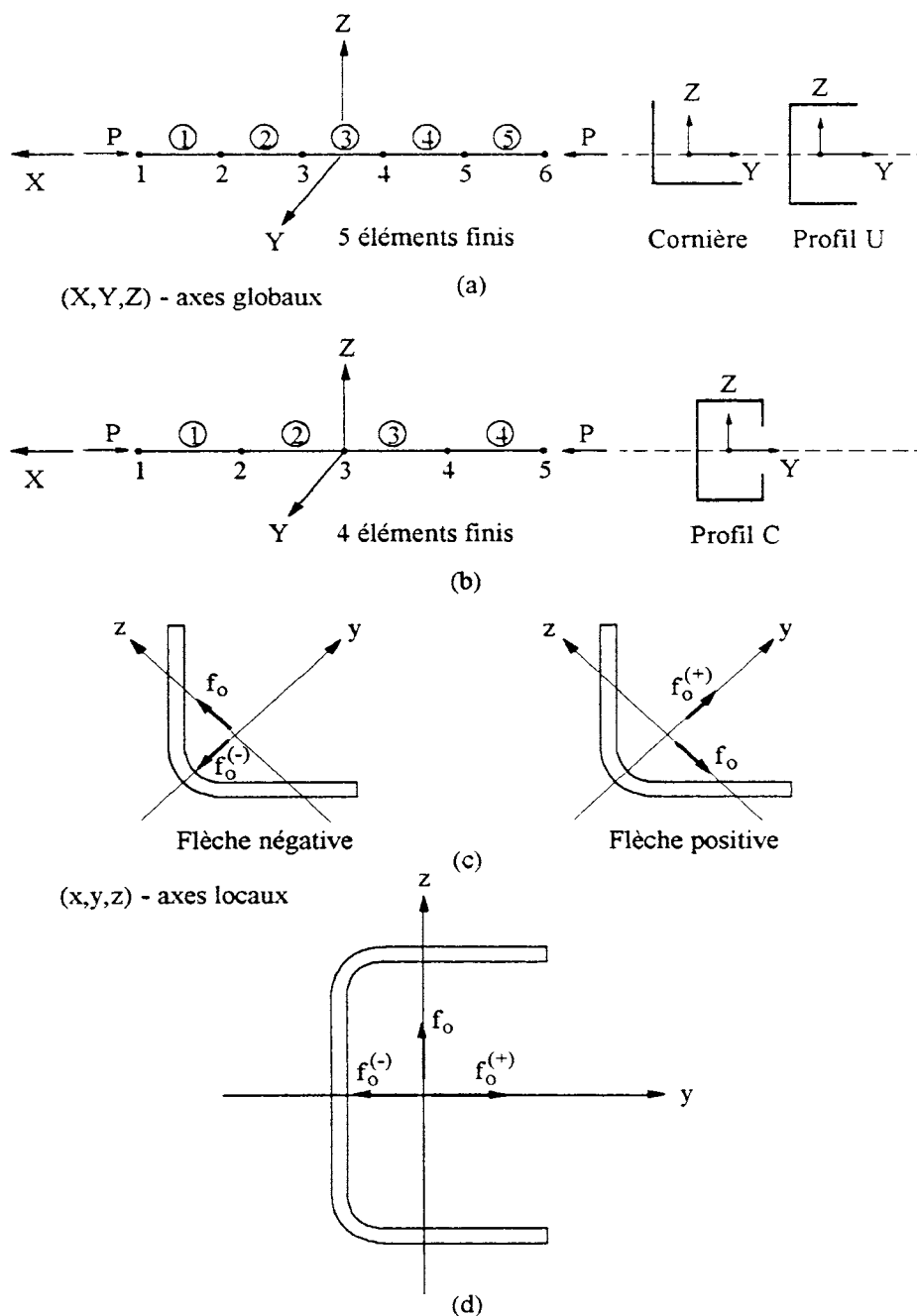


Figure 5.1- La discrétisation et le sens des flèches initiales.  
 (a) Discretisation de la cornière et du profil U;  
 (b) Discretisation du profil C;  
 (c) Flèche initiale de la cornière;  
 (d) Flèche initiale des profils U et C.

## 5.2. CORNIERE

### 5.2.1. Introduction

COSTA FERREIRA et RONDAL ont entrepris une recherche expérimentale de la stabilité de cornières à ailes égales profilées à froid et soumises à compression centrée [82]. Les résultats expérimentaux de cette recherche seront comparés au résultats numériques obtenus par élément fini de poutre spatiale avec prise en compte du voilement par la méthode des largeurs effectives.

Dans la recherche expérimentale citée ci-dessus, on a mesuré les imperfections géométriques (dimensions de la section, longueur, déformée initiale globale et locale) et les imperfections structurales (contraintes résiduelles et dispersion de la limite élastique) pour chaque pièce testée. Les mesures et les résultats des essais sont répertoriés dans le rapport d'essai, [82]. Les valeurs moyennes des dimensions de la section, des longueurs des pièces, des flèches initiales maxima et des limites élastiques pour la série d'essais CL sont données au tableau 5.2. La figure 5.2 montre les caractéristiques géométriques. On note que les flèches initiales maximales ont été mesurées dans les axes globaux Y et Z, voir aussi figure 5.1a.

	W	t	r	L	$b_p/t$	$(f_{ym}/L) \text{ ‰}$	$(f_{zm}/L) \text{ ‰}$	$f_y \text{ (MPa)}$
CL 100	154	6,08	8	446	23,0	--	--	371
CL 200	154	6,08	8	1776	23,0	-0,25	-0,3	371
CL 300	154	6,08	8	2897	23,0	-0,37	-0,63	371
CL 400	154	6,08	8	3992	23,0	-0,44	-0,77	371

Remarques:

- Toutes les valeurs sont des moyennes pour chaque série.
- CL 100 - série de tronçon court.
- CL 200, CL 300 et CL 400 - séries de tronçons longs.
- $(f_{ym}/L) \text{ ‰}$  et  $(f_{zm}/L) \text{ ‰}$  -> flèches relatives maxima.

Tableau 5.2- Caractéristiques géométriques et limite élastique des cornières de la série CL.

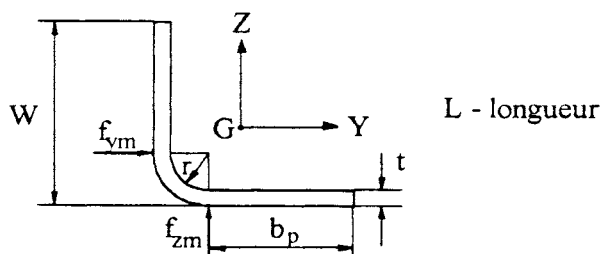


Figure 5.2- Les caractéristiques géométriques de la cornière.

On rappelle que la limite élastique utilisée pour le calcul de la largeur effective doit être la limite élastique du matériau de base, avant la mise en forme des profils. On espère ainsi tenir compte des imperfections géométriques locales et imperfections structurales (dispersion de la limite élastique et contraintes résiduelles). Les cornières sont fabriquées à partir d'un même feuillard de qualité ST 52 selon la norme DIN 17100 dont la limite élastique minimale garantie est de 360 MPa. La valeur de la limite élastique donnée au tableau 5.2 est la moyenne des essais de traction réalisés sur des éprouvettes prélevées du milieu des faces des profils. Il est bien connu que l'augmentation de la limite élastique dû au processus de fabrication à froid est plus important sur les arrondis et sur ses voisinages, à cause de l'écrouissage, qu'au milieu des faces. Ainsi, on considère que limite élastique donnée au tableau 5.2 est très proche de la limite élastique de la bande mère.

### 5.2.2. Tronçon court

Dans sa thèse de doctorat, de VILLE [69] a étudié l'instabilité de tronçons courts de cornières. Il montre que l'inertie en gauchissement  $I_{\omega}$  peut être négligée pour le calcul de la charge critique de torsion d'une cornière, équation (3.20), lorsque le rapport  $L/(W - t/2)$  est supérieur à 10, approximativement. Dans le cas des cornières courtes, la charge critique de torsion est très proche de la charge critique de flexion-torsion. Pour la série CL100 le rapport  $L/(W - t/2)$  vaut 2,95 et donc l'inertie  $I_{\omega}$  ne peut être négligée lors du calcul de la charge critique de flexion-torsion. La première ligne du tableau 5.3 montre les charges critiques de flexion-torsion pour les deux conditions d'appui en torsion et la charge de ruine expérimentale moyenne de la série CL100. On note que la charge de ruine expérimentale est nettement supérieure à la charge critique de flexion-torsion avec le gauchissement libre aux extrémités. Ainsi, on peut considérer que les plateaux de la presse d'essais empêchent vraiment le gauchissement des sections d'extrémités. D'autre part, le voilement des ailes exerce un effet réducteur sur la charge de ruine lorsqu'on la compare à la charge critique de flexion-torsion avec gauchissement empêché aux extrémités.

La deuxième ligne du tableau 5.3 montre les charges de ruine obtenues selon les approches de l'Eurocode 3, proposition B et proposition A. Pour chaque approche les charges de ruine sont calculées selon deux conceptions différentes:

- a) La première consiste à ne tenir compte que du voilement, la flèche initiale est nulle. La charge de ruine,  $P_r(1)$ , ainsi calculée est égale à l'aire effective, pour une compression uniforme égale à  $f_y$ , fois la limite élastique  $f_y$ . La charge de ruine trouvée par l'Eurocode 3 est inférieure à celles des deux autres car la ruine de la plaque appuyée sur un seul bord est dictée par formule de Winter (voir tableau 2.4) pour l'Eurocode 3, alors que pour les propositions A et B la ruine de la plaque appuyée sur un seul bord est dictée par la formule de Kalyanaraman, équation (2.49). On voit que les charges de ruine théoriques sont très supérieures à la charge de ruine expérimentale. Alors, on peut conclure que le voilement n'est pas le seul responsable de la réduction de la



charge de ruine expérimentale par rapport à la charge critique de flexion-torsion avec gauchissement empêché aux extrémités;

- b) Cette conception consiste à considérer le tronçon court comme une colonne avec une flèche initiale égale à  $\pm 0,5(L/1000)$ . Ainsi, la charge de ruine obtenue tiendra compte de l'interaction entre le flambement par flexion-torsion et le voilement des ailes. Il faut rappeler que lors du calcul numérique par élément fini on considère que le tronçon court est bi-encasté en flexion, voir tableau 5.1, alors que la charge critique de flexion-torsion donnée au tableau 5.3 suppose que la pièce est bi-appuyée en flexion. Donc, cette valeur critique ne doit pas être prise comme la valeur maximale de charge de ruine qu'on peut obtenir par calcul numérique. Le tableau 5.3 montre que la proposition A est la seule qui converge pour tous les cas et donne un résultat du côté conservatif. Ce conservatisme vient probablement du fait que dans la proposition A les coefficients de voilement des plaques sont pour la section soumise à la compression uniforme et ne changent pas pour tenir compte du changement progressif du gradient de contraintes sur la section, comme déjà dit au paragraphe 2.6.5. La ruine numérique est limitée par début de plastification. A défaut de tenir compte du voilement des ailes, la plastification débute pour une charge de 443 KN. Donc, on peut conclure que les phénomènes de flambement par flexion-torsion et de voilement ne peuvent pas être dissociés pour comprendre le comportement d'un tronçon court de cornière à parois minces.

CL 100	$P_{ft}$ ( $k_{33}=1$ ) 289,1	$P_{ft}$ ( $k_{33}=4$ ) 463,1	$P_{exp}$ Moyenne 339,9
	<b>Eurocode 3</b>	<b>Proposition B</b>	<b>Proposition A</b>
Pr (1)	391	433	433
Pr (2)	--	357	317
Pr (3)	--	--	317,4
Remarques: - Ruine limitée par début de plastification. - (1) - Noeuds intermédiaires (non-appuyés) empêchés de tourner autour de y et z, et de gauchir pour éviter de l'instabilité numérique. - Flèche initiale dans les sens y et z des axes principaux d'inertie. - (2) - Flèche Initiale = -0.5 (L/1000) - centre de gravité du côté concave. - (3) - Flèche Initiale = +0.5 (L/1000) - centre de gravité du côté convexe. - ( -- ) - Le calcul numérique ne converge pas.			

Tableau 5.3- Résultats du tronçon court de cornière.

### 5.2.3. Tronçon long

Le tableau 5.4 montre les valeurs de charges critiques pour les différents modes de flambement pour les trois séries de tronçons longs, ainsi que la valeur moyenne de la charge de ruine expérimentale de chaque série. On note que le mode critique est celui de flexion-torsion pour les 3 séries. En plus, on voit que les charges critiques pour  $k_{33} = 1$  et  $k_{33} = 4$  sont très proches et donc l'empêchement du gauchissement aux sections d'extrémités ne joue pas un rôle important pour les tronçons longs. Quant aux charges de ruine expérimentales, elles sont supérieures aux valeurs de charges critiques pour les séries CL200 et CL300. Il semble que, dans ces cas, les plateaux de la presse d'essai auraient joué un rôle d'encastrement partiel en flexion.

	$P_f$	$P_{ft}$ ( $k_{33}=1$ )	$P_{ft}$ ( $k_{33}=4$ )	$P_{exp}$ Moyenne	$P_r$		
					Eurocode 3	Proposition B	Proposition A
CL 200	1088,0	230,3	240,9	256,0	--	223	220,3
CL 300	408,8	220,4	224,1	258,1	--	197,9	193,6
CL 400	215,3	208,5	210,2	159,8	166,7	--	161,7
Remarques:							
- La déformée initiale est de type sinusoïdal avec la valeur maximale égale à la flèche donnée au tableau 5.2 pour le calcul de $P_r$ .							
- $P_r$ - charge de ruine en régime élastique avec flambement par flexion torsion.							
- ( -- ) - Le calcul numérique ne converge pas.							

Tableau 5.4- Résultats des tronçons longs de cornière.

Afin d'avoir une idée des performances des différentes approches de calcul de largeurs effectives, on a calculé numériquement les charges de ruine pour les 3 séries avec les valeurs moyennes de dimensions et flèches initiales montrées au tableau 5.2. Ces résultats sont aussi montrés au tableau 5.4. On peut constater que la proposition A est la seule qui converge pour les trois séries. Donc, on l'a choisi pour calculer numériquement les charges de ruine de chaque profil de chaque série de tronçons longs. Cette fois on a mis pour chaque profil les dimensions réelles mesurées. Cependant la position du point de connexion est celle du centre de gravité de la section moyenne donnée au tableau 5.2. Ainsi, on a tenu compte des excentricités accidentelles dues aux imperfections géométriques de la section des profils. Quant aux déformées initiales utilisées, elles sont le reflet le plus exact possible de celles qui ont été mesurées. Dans ce but, chaque profil est discrétisé avec 10 éléments finis. Les résultats trouvés pour chaque série sont montrés aux tableaux 5.5 à 5.7. Dans les 3 séries, la ruine numérique se passe en régime élastique avec un flambement par flexion-torsion. On constate que les coefficients de variation des calculs statistiques sont plus petits que 5% pour les 3 séries et que dans la série CL400 il y a eu un excellent accord entre les charges de ruine expérimentales et numériques.

	$P_{exp}$	$P_r$	$P_{exp}/P_r$
CL 201	249	220,7	1,13
CL 202	264	221,0	1,19
CL204	256	219,3	1,17
CL 205	256	219,2	1,17
CL 206	263	219,6	1,20
CL 207	254	217,3	1,17
CL 208	250	217,7	1,15
Moyenne	256	219	1,17
Ecart type	5,80	1,38	0,02
Coef. de Var.(%)	2,27	0,63	2,08
Remarques:			
- Charge de ruine $P_r$ trouvée par programme avec déformée réelle et 10 éléments finis.			
- Ruine en régime élastique avec flambement par flexion-torsion.			

Tableau 5.5- Résultats de la série de tronçons longs CL200.

	$P_{exp}$	$P_r$	$P_{exp}/P_r$
CL 304	249	187,1	1,33
CL 305	251	185,9	1,35
CL 306	253	204,9	1,23
CL 307	273	198,6	1,37
CL 308	267	196,6	1,36
CL 310	268	197,8	1,35
CL 311	250	184,4	1,36
CL 312	254	196,7	1,29
Moyenne	258	194,0	1,33
Ecart type	9,57	7,31	0,05
Coef. de Var.(%)	3,71	3,77	3,48
Remarques:			
- Charge de ruine $P_r$ trouvée par programme avec déformée réelle et 10 éléments finis.			
- Ruine en régime élastique avec flambement par flexion-torsion.			

Tableau 5.6- Résultats de la série de tronçons longs CL300.

	$P_{exp}$	$P_r$	$P_{exp}/P_r$
CL 404	156	170,9	0,91
CL 405	167	159,9	1,04
CL 406	159	162,5	0,98
CL 407	158	159,7	0,99
CL 408	152	159,8	0,95
CL 409	162	169,9	0,95
CL 410	167	167,0	1,00
CL 411	157	152,3	1,03
Moyenne	160	162,8	0,98
Ecart type	5,28	6,22	0,04
Coef. de Var.(%)	3,31	3,82	4,42
Remarques:			
- Charge de ruine $P_r$ trouvée par programme avec déformée réelle et 10 éléments finis.			
- Ruine en régime élastique avec flambement par flexion-torsion.			

Tableau 5.7- Résultats de la série de tronçons longs CL400.

La figure 5.3 résume graphiquement tous les résultats des tronçons longs étudiés jusqu'ici. Cette figure montre aussi que la prise en compte correcte des conditions d'appui en torsion ne joue un rôle important que pour des petites longueurs. En fait, si le gauchissement est empêché aux extrémités, on obtient une augmentation de la charge critique de flexion-torsion par rapport au cas du gauchissement libre aux extrémités pour de petites longueurs. Si on se rappelle ce qui a déjà été dit au paragraphe 5.2.2 que l'inertie en gauchissement  $I_\omega$  ne peut être négligée pour le calcul de la charge critique de flexion-torsion lorsque le rapport  $L/(W-t/2)$  est plus petit que 10; la longueur correspondante à ce rapport,  $\sim 1500$  mm, correspond plus au moins à la longueur pour laquelle les courbes de charges critiques de flexion-torsion avec  $k_{33}=1$  et  $k_{33}=4$  commencent à monter plus fort. On peut donc conclure que pour des cornières satisfaisant l'inégalité  $L/(W-t/2) \leq 10$ , non seulement la prise en compte de l'inertie en gauchissement est importante, tout comme la prise en compte correcte des conditions d'appui en torsion est importante pour le calcul de la charge critique de flexion-torsion.

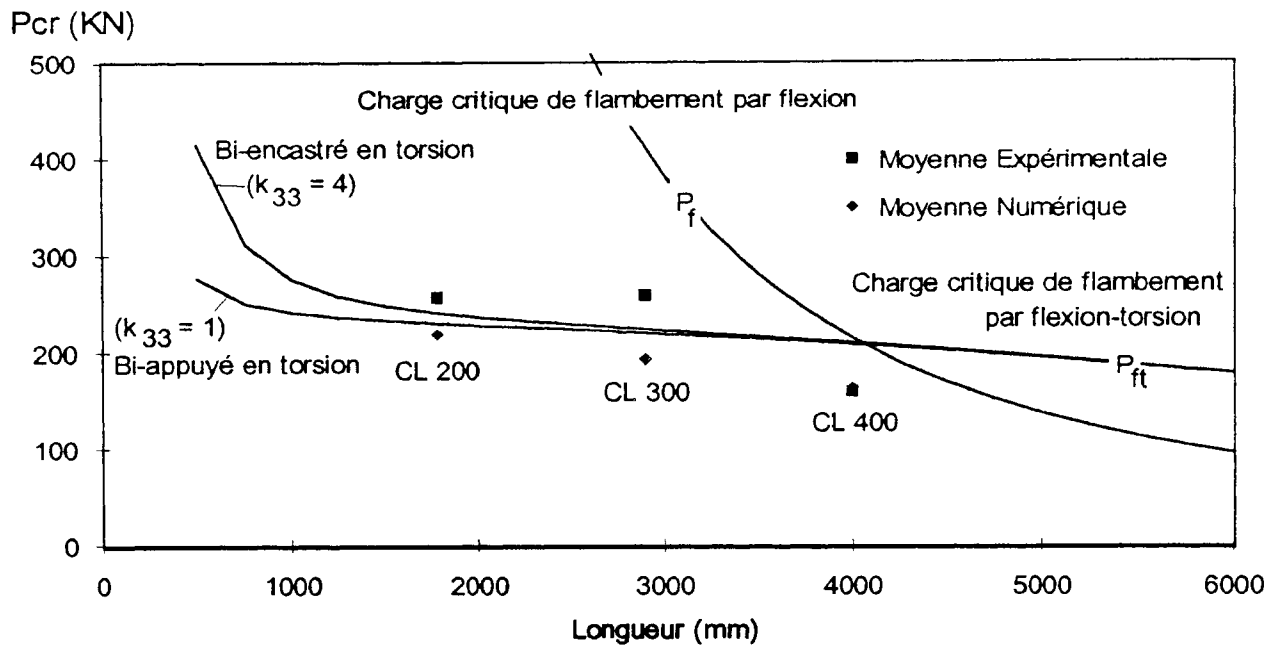


Figure 5.3- Résumé graphique des résultats pour les tronçons longs.

Afin de pouvoir mieux comprendre le comportement de la cornière et de rassembler les résultats isolés qu'on a obtenus pour les tronçons courts et pour les tronçons longs, on a entrepris une étude de la charge de ruine numérique (avec et sans voilement) en fonction de la longueur  $L$ . La flèche initiale est de  $L/1000$  dans le sens défavorable (sens négatif) - voir figure 5.1c et paragraphe 3.3.2.1. Les résultats de cette étude sont montrés au tableau 5.8. La variable  $\bar{\lambda}_c$  qui figure sur ce tableau est l'élancement réduit de colonne donné par :

$$\bar{\lambda}_c = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (5.1)$$

où  $\sigma_{cr}$  est la contrainte critique de flambement la plus petite entre le mode de flexion autour de l'axe faible et le mode de flexion-torsion. L'examen de ce tableau permet de tirer les conclusions suivantes :

- Les charges de ruine pour les deux conditions d'appui en torsion ne diffèrent pas beaucoup, soit sans, soit avec voilement, pour des longueurs plus grandes ou égales à 1500 mm, alors que pour des longueurs plus petites que 1500 mm les différences entre les charges de ruine pour les deux conditions d'appui sont d'autant plus importantes que la longueur est plus petite. Donc on peut dire que, tout comme pour la charge critique de flexion-torsion, la prise en compte correcte des conditions d'appui en torsion est importante lorsque le rapport  $L/(W - t/2)$  est plus petit que 10, pour le calcul de la charge de ruine. Ceci est dû au fait de que l'inertie en gauchissement contribue à la résistance de la pièce lorsque  $L/(W - t/2) \leq 10$ . Les résultats de la série CL100,  $L/(W - t/2) = 2,95$ , de tronçons courts confirment cette conclusion;

- b) En observant le rapport de la charge de ruine numérique sans voilement et avec voilement, on note que le voilement a une très petite influence sur la charge de ruine pour des longueurs plus grandes que 1500 mm, alors que pour des longueurs plus petites que 1500 mm l'influence du voilement est d'autant plus importante que la longueur est plus petite. Si on se rappelle que l'inertie en gauchissement contribue à la résistance de la pièce lorsque  $L/(W - t/2) \leq 10$ , on s'aperçoit que les contraintes additionnelles dues au gauchissement différentiel du profil et qui viennent s'ajouter aux contraintes de flexion, sont responsables d'un voilement plus fort de la section. Pour ces deux extrêmes on trouve la série CL100,  $L = 446$  mm, où la prise en compte du voilement a été indispensable pour obtenir une bonne corrélation numérique-expérimentale et la série CL400,  $L = 3992$  mm, où l'érosion entre la charge de ruine et la charge critique est plutôt due aux imperfections géométriques de l'axe de la pièce plutôt qu'au voilement de ses ailes. Finalement, il est intéressant de rappeler que ces conclusions sont en accord avec les résultats analytiques de COSTA FERREIRA et RONDAL [49], déjà présentés au paragraphe 2.4.2, montrant que la charge critique de flambement par torsion, lorsqu'on néglige l'inertie en gauchissement, est très proche de la charge critique de voilement de ses parois et ceci est d'autant plus vrai que les ailes sont plus minces, rapport  $b_p/t$  plus grand, voir équations (2.71) à (2.75);
- c) Ce tableau montre que pour des pièces courtes,  $L/(W - t/2) \cong 3$ , le coefficient d'élancement de colonne,  $\bar{\lambda}_c$ , est largement supérieur à 0,2 qui est la limite du plateau des tronçons courts des courbes de flambement Européennes. Or, on voit que la notion de tronçon court de cornière, au point de vue de vouloir dissocier les phénomènes d'instabilité globale et locale afin de pouvoir étudier le voilement proprement dit, n'existe pas. En effet, au paragraphe 5.2.2, on a constaté que pour avoir une bonne corrélation numérique-expérimentale, on a dû considérer le tronçon court comme un tronçon long avec une déformée initiale, tenir compte du voilement et prendre en compte correctement les conditions d'appui en torsion (gauchissement empêché aux extrémités). Il faut aussi dire que COSTA FERREIRA et RONDAL ont dimensionné les tronçons courts de la série CL100 de manière à que  $\bar{\lambda}_c$  soit égal à 0,2, mais ils ont négligé la contrainte critique de flambement par flexion-torsion et n'ont utilisé que la contrainte critique de flexion dans l'expression (5.1);
- d) En examinant la colonne des valeurs de  $\bar{\lambda}_c$  et la colonne des rapports des charges de ruine sans voilement et avec voilement pour la condition d'appui bi-appuyé en torsion, on est tenté de dire que lorsque  $\bar{\lambda}_c$  est plus grand qu'une valeur située entre 1,75 et 1,80, l'influence du voilement sur la charge de ruine est pratiquement négligeable pour des fins pratiques. Il est évident que cette affirmation n'est strictement valable que pour des profils ayant les mêmes dimensions transversales et la même limite élastique de la série CL. Pour pouvoir généraliser cette affirmation, il faudrait faire des études

paramétriques pour des cornières à parois minces trouvées en pratique. De toute façon, ceci constitue déjà une information intéressante.

Longueur L	Rapport $L/(w - t/2)$	Condition d'appui en torsion							
		Bi-appuyé				Bi-encasté			
		$\bar{\lambda}_c$	$P_r(1)$	$P_r(2)$	$\frac{P_r(1)}{P_r(2)}$	$\bar{\lambda}_c$	$P_r(1)$	$P_r(2)$	$\frac{P_r(1)}{P_r(2)}$
400	2,6	1,49	289	247	1,17	1,14	427	292	1,46
500	3,3	1,56	270	238	1,13	1,27	373	276	1,35
1000	6,6	1,67	246	223	1,10	1,56	264	235	1,12
1500	9,9	1,70	230	213	1,08	1,64	234	218	1,08
2000	13,2	1,71	213	203	1,05	1,68	215	203	1,06
2500	16,6	1,73	201	190	1,05	1,71	201	190	1,05
3000	19,9	1,75	188	178	1,05	1,73	188	178	1,05
3500	23,2	1,77	173	166	1,04	1,76	173	166	1,04
4000	26,5	1,79	156	151	1,03	1,79	156	151	1,03
4500	29,8	1,82	136	135	1,01	1,82	136	135	1,01
5000	33,1	1,86	117	117	1,00	1,86	117	117	1,00
Remarques:									
- $P_r$ obtenue avec déformée initiale sinusoïdale avec flèche $f_0 = -(L / 1000)$ .									
- (1) - $P_r$ sans voilement.									
- (2) - $P_r$ avec voilement.									

Tableau 5.8- Etude de la variation de la charge de ruine avec la longueur.

#### 5.2.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine

Le but principal de ce paragraphe est d'étudier l'influence de l'amplitude et du sens de la déformée initiale sur la charge de ruine et le mode d'instabilité des séries des tronçons longs de cornière. Les tableaux 5.9 à 5.11 montrent les résultats de cette étude pour les 3 séries de tronçons longs - toutes calculées avec la proposition A pour les largeurs effectives. Pour chaque série on a calculé les charges de ruine sans et avec voilement. Pour les séries CL200 et CL300 la ruine se passe en régime élastique avec flambement par flexion-torsion, alors que dans la série CL400 le flambement est par flexion-torsion si la flèche initiale est négative ou par flexion si la flèche initiale est positive. En fait, la figure 5.3 a déjà montré que les charges critiques de flexion et de flexion-torsion sont très proches pour la série CL400. En plus, c'est la plastification qui limite la ruine lorsque la flèche initiale est positive. Il faut rappeler que le comportement post-critique par flexion est stable. C'est pourquoi les valeurs des charges de ruine pour les flèches positives du tableau 5.11 dans la colonne 'Elasticité Pure' sont les mêmes et égales à la charge critique de flexion. Le tableau 5.11 montre aussi que pour des très petites flèches positives le comportement quant au type de ruine et au mode d'instabilité est tout à fait semblable au cas de flèches négatives lorsqu'on considère le voilement.

CL 200		
Déf. Initiale Sinusoïdale $f_0 / (L/1000)$	$P_r$ Sans Voilement (KN)	$P_r$ Avec Voilement (KN)
-2,0	206,9	198,1
-1,0	220,1	208,6
-0,5	228,5	214,6
-0,2	235,2	218,5
+0,01	243,0	221,1
+0,2	237,8	220,8
+0,5	235,1	220,1
+1,0	232,6	219,5
+2,0	230,2	218,5
Remarques:		
- Ruine en régime élastique avec flambement par flexion-torsion.		
- Discrétisation avec 5 éléments finis.		

Tableau 5.9- Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine des profils du type CL200.



CL 300		
Déf. Initiale Sinusoïdale $f_o / (L/1000)$	$P_r$	$P_r$
	Sans Voilement (KN)	Avec Voilement (KN)
-2,0	169,5	163,7
-1,0	188,7	179,6
-0,5	202,6	190,0
-0,2	213,9	197,8
+0,01	224,9	207,6
+0,2	219,7	202,2
+0,5	215,8	199,9
+1,0	212,6	198,1
+2,0	209,1	196,0
Remarques:		
- Ruine en régime élastique avec flambement par flexion-torsion.		
- Discrétisation avec 5 éléments finis.		

Tableau 5.10-Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine des profils du type CL300.

CL 400			
Déf. Initiale Sinusoïdale $f_o / (L/1000)$	$P_r$ (KN)		$P_r$ (KN)
	Sans Voilement		Avec Voilement
	Elasticité pure	Elasto-plastique	Elasto-plastique
-2,0	EL 136,0	EL 136,0	EL 133,9
-1,0	EL 155,3	EL 155,3	EL 150,8
-0,5	EL 171,1	EL 171,1	EL 163,3
-0,2	EL 186,5	EL 186,5	EL 175,2
+0,01	EL 215,0	EL 215,0	FT/EL 195,8
+0,2	EL 215,0	PL 211,7	FT/EL 187,0
+0,5	EL 215,0	PL 206,2	PL 205,9
+1,0	EL 215,0	PL 198,3	PL 198,2
+2,0	EL 215,0	PL 185,5	PL 184,8
Remarques:			
- $f_o / (L/1000) < 0$ -> Flambement par flexion-torsion			
- $f_o / (L/1000) > 0$ -> Flambement par flexion			
- EL -> Ruine en régime élastique			
- PL -> Ruine limitée par début de plastification			
- FT -> Ruine par flambement par flexion-torsion			
- Discrétisation avec 5 éléments finis.			

Tableau 5.11-Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine des profils du type CL400.

Afin de pouvoir tirer des conclusions plus facilement, on a représenté graphiquement les résultats des tableaux 5.9 à 5.11 dans les figures 5.4 à 5.6. Pour faciliter la comparaison entre ces figures, les valeurs minima et maxima des axes des abscisses et des ordonnées sont les mêmes. L'examen de ces figures permet de tirer les conclusions suivantes:

- L'écartement entre les courbes de charges de ruine sans et avec voilement est d'autant plus petit que la cornière est plus longue. Ceci confirme la conclusion 'b' du paragraphe précédent;
- On voit très nettement que pour une même valeur absolue de la flèche initiale, les charges de ruine sont plus petites pour les flèches négatives. Donc, le sens défavorable de la déformée initiale est le sens négatif. Ce fait est valable soit sans voilement, soit avec voilement pris en compte. Ceci confirme la conclusion du paragraphe 3.3.2.1 de que la déformée initiale est défavorable lorsque son côté convexe est tourné vers le centre de torsion de la section;
- L'examen des trois figures quant au taux de réduction de la charge de ruine avec l'amplitude de la flèche permet de constater que l'influence de la déformée initiale sur la charge de ruine est d'autant plus négative que la cornière est plus longue;
- L'influence du voilement sur la charge de ruine est d'autant moins important que la flèche initiale est plus négative lorsque le flambement est par flexion-torsion, comme le montrent les trois figures. D'autre côté, lorsque le flambement est par flexion, comme c'est le cas de la série CL400 pour les flèches positives, le voilement joue un rôle pratiquement négligeable avec la ruine limitée par début de plastification.

Pr (KN)

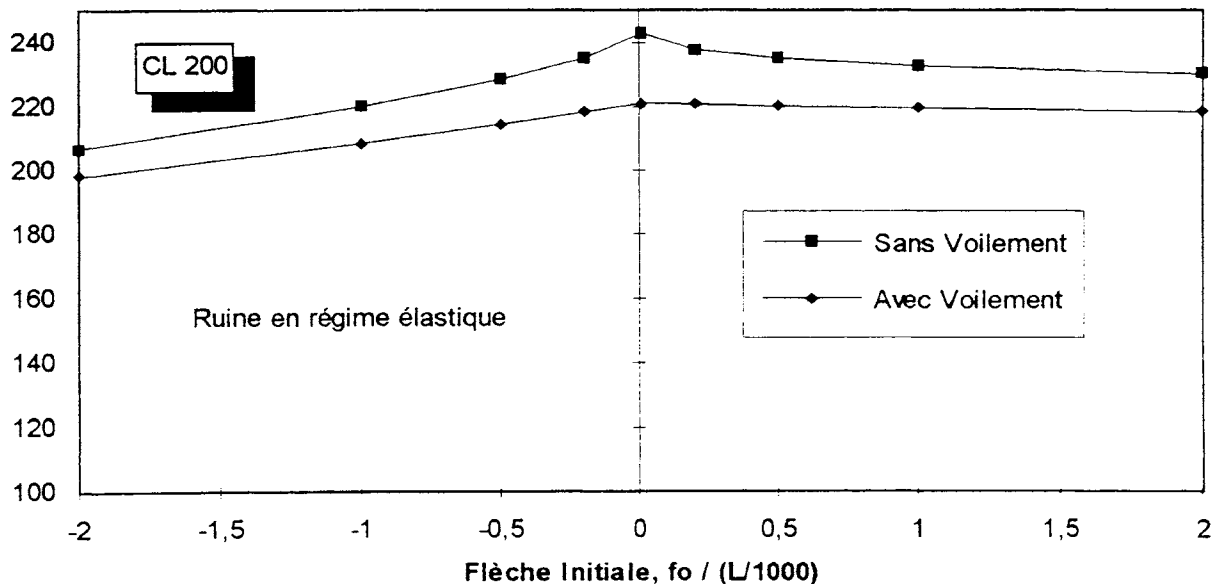


Figure 5.4- Représentation graphique du tableau 5.9.

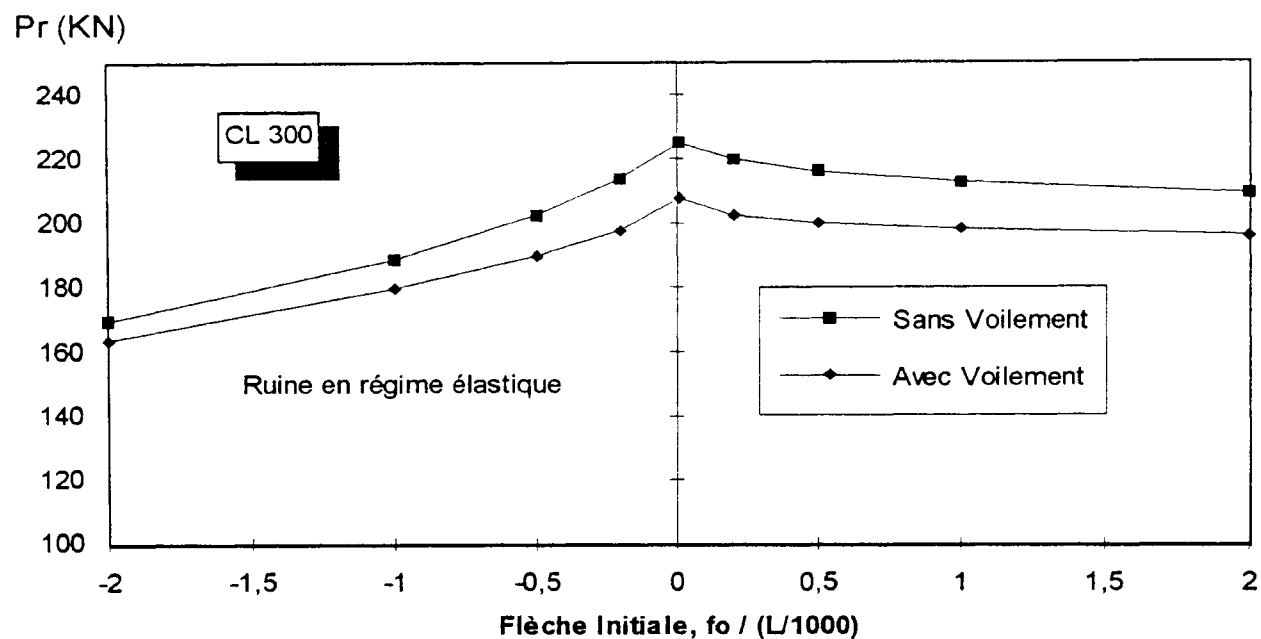


Figure 5.5- Représentation graphique du tableau 5.10.

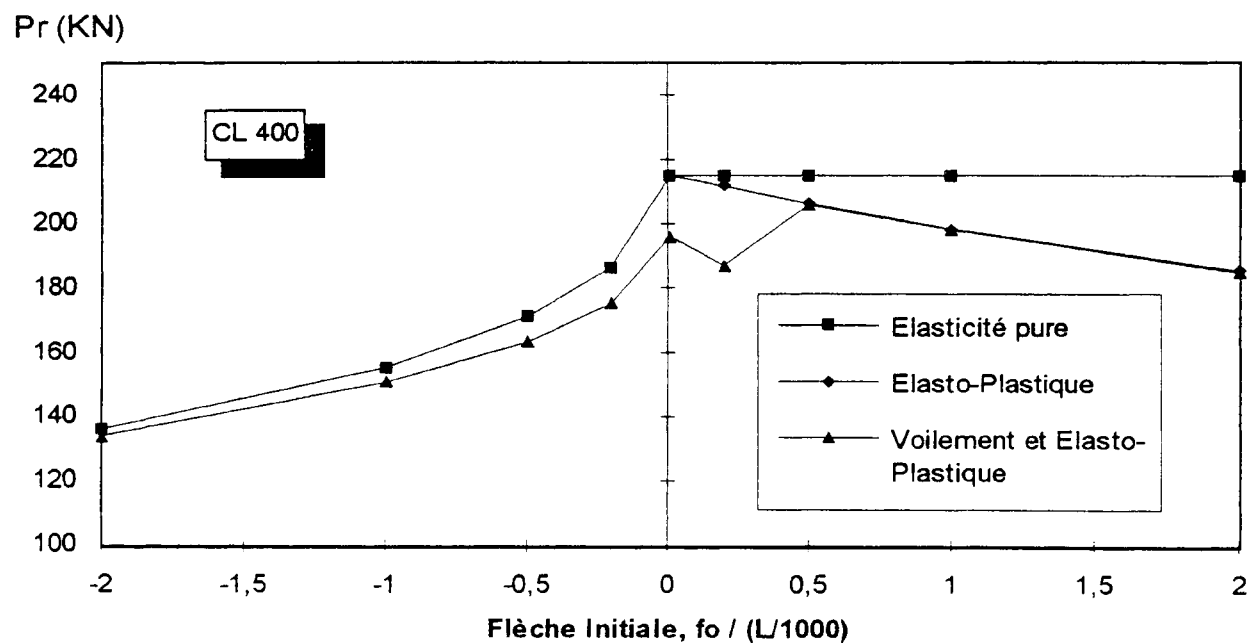


Figure 5.6- Représentation graphique du tableau 5.11.

Afin d'illustrer le comportement charge x déplacement, les figures 5.7 et 5.8 montrent les courbes obtenues pour un profil du type CL400 avec les flèches initiales de  $(-L/1000)$  et  $(+L/1000)$ , respectivement. Les déplacements sont donnés dans les axes globaux, voir figure 5.1a. La figure 5.7 montre que le comportement post-critique est instable lorsque le flambement est par flexion-torsion, alors que la figure 5.8 montre un comportement post-critique stable lorsque le flambement est par flexion, si on est en élasticité pure. La figure 5.8 montre que la courbe charge x déplacement avec voilement est non seulement pratiquement coïncidente avec la courbe 'élasto-plastique' avant plastification, mais elle est aussi plus raide que la courbe 'élasto-plastique' après plastification. Ce comportement peut être mieux compris à l'aide de la figure 5.9. Cette figure montre les déplacements du centre de gravité de la section effective de l'élément fini 3 dans les axes globaux montrés à la figure 5.1a. Tout d'abord, on voit que les déplacements du centre de gravité sont très petits (voilement très faible), ce qui justifie la forte proximité entre les courbes 'voilement' et 'élasto-plastique' avant plastification. On note aussi qu'après plastification les positions du centre de gravité de la courbe 'élasto-plastique' (centre de gravité de la section pleine) et de la courbe 'voilement' (centre de gravité de la dernière section effective) sont différentes. C'est pourquoi la courbe 'voilement' est plus raide que la courbe 'élasto-plastique' après plastification. Finalement, les figures 5.10a et 5.10b illustrent les déformées à la ruine du profil CL 400 avec une flèche initiale de  $-L/1000$ , mode d'instabilité par flexion-torsion, et avec une flèche initiale de  $+L/1000$ , mode d'instabilité par flexion, respectivement.

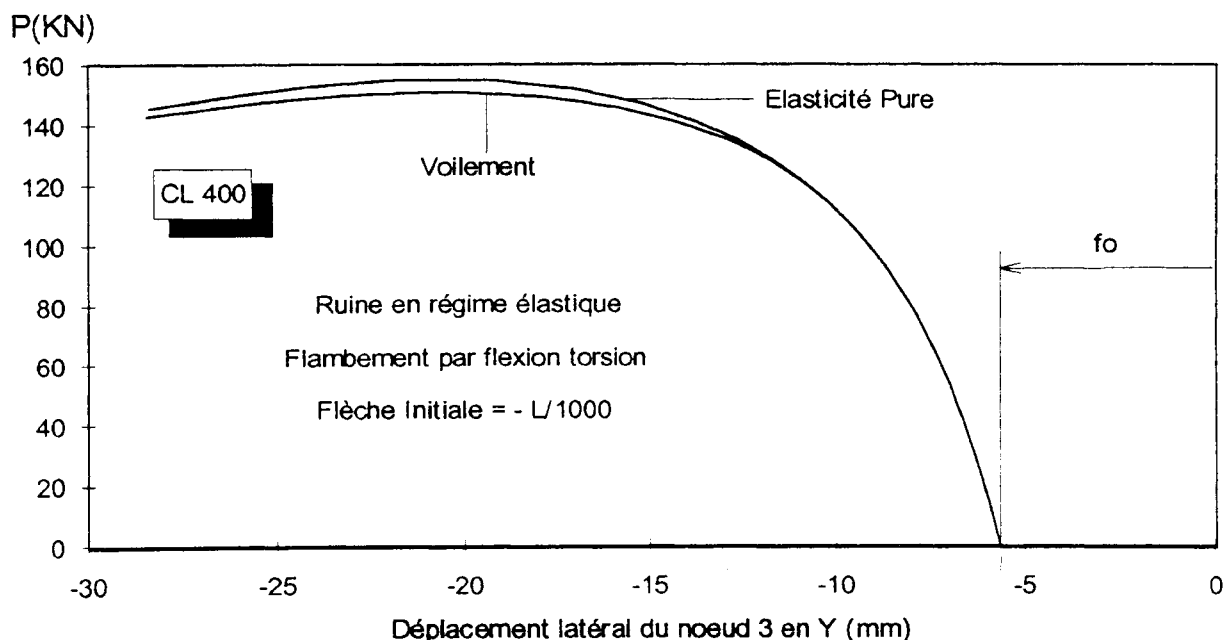


Figure 5.7- Courbes de charge x déplacement.

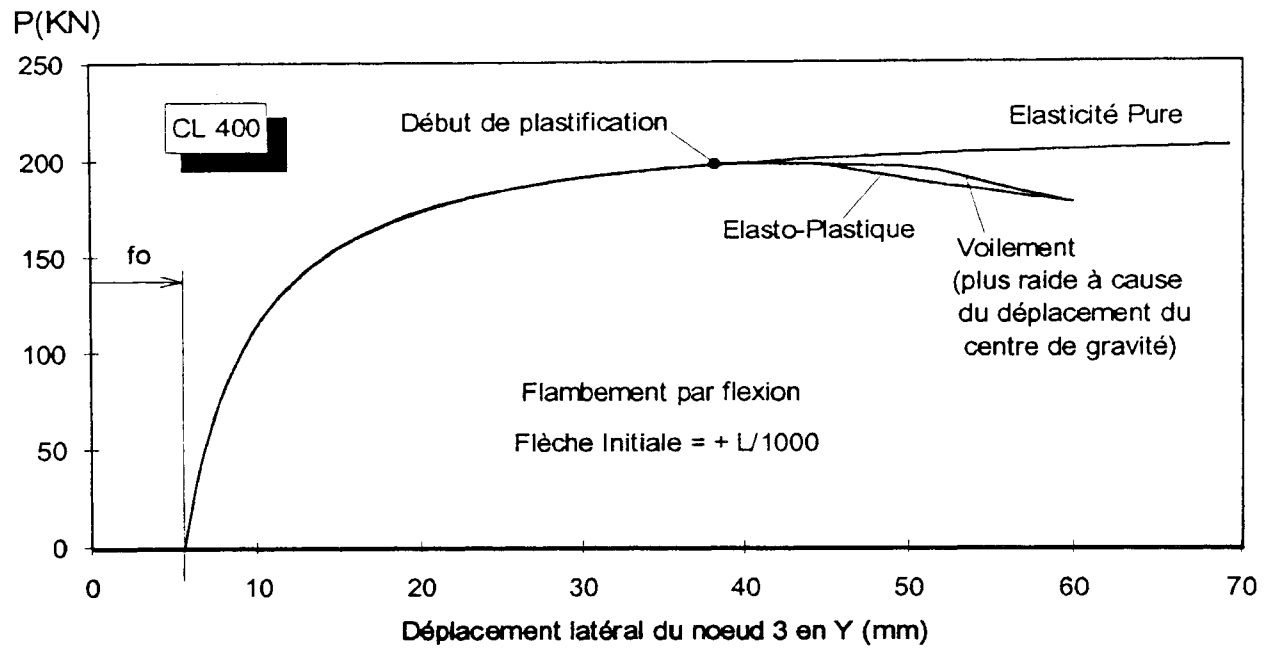


Figure 5.8- Courbes de charge x déplacement.

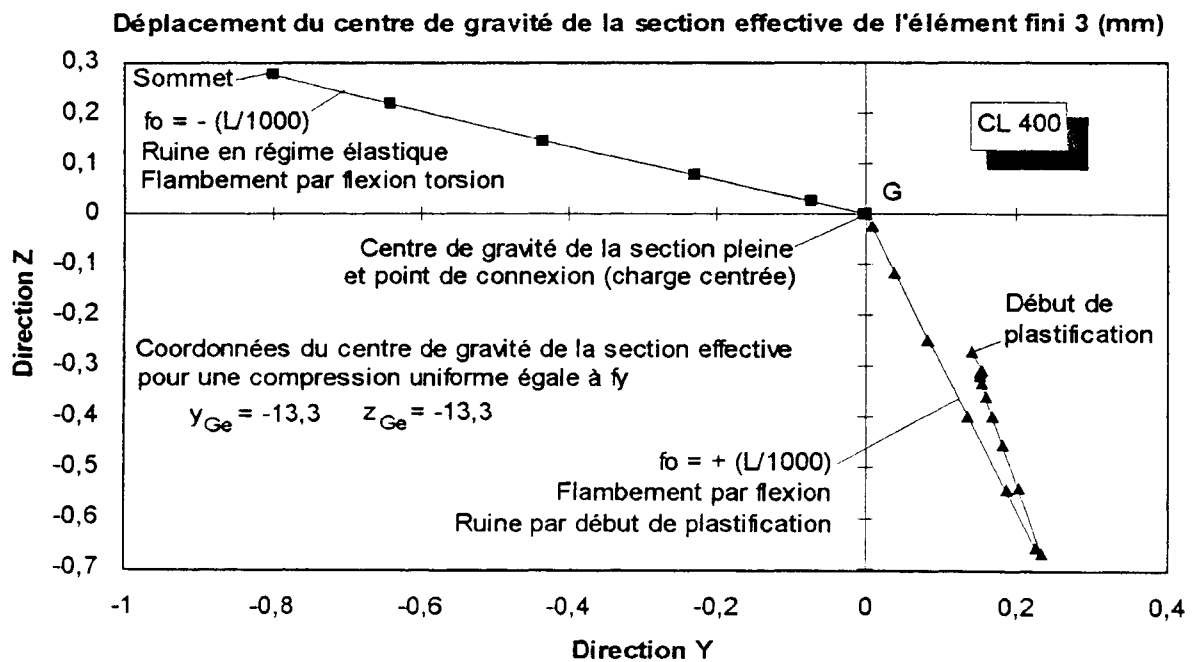


Figure 5.9- Déplacement du centre de gravité de la section effective.

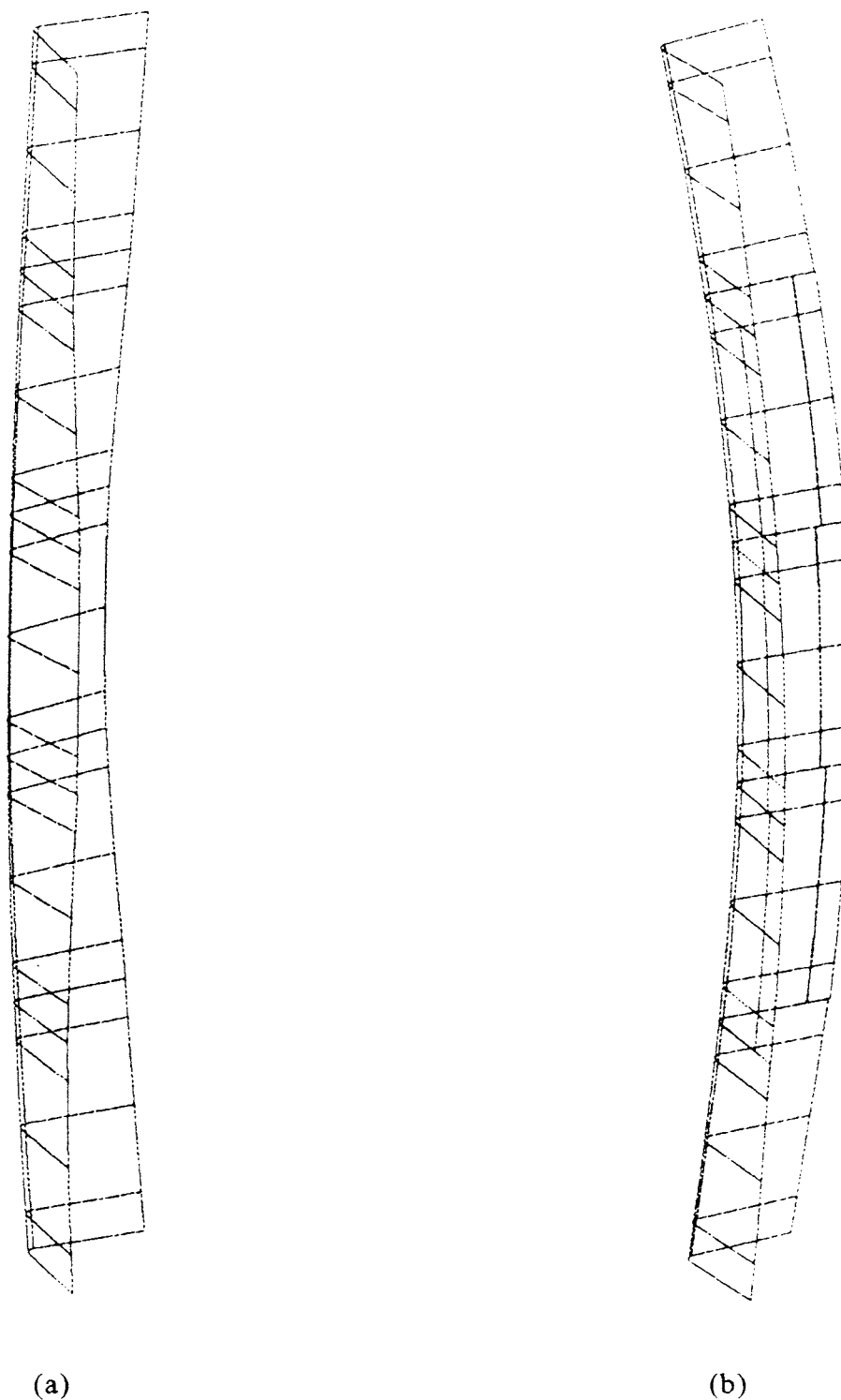


Figure 5.10- Visualisation de la déformée du profil CL 400 à la ruine.

(a) Flèche initiale égale à  $-L/1000$ , déformée amplifiée 2 fois;

(b) Flèche initiale égale à  $+L/1000$ , déformée amplifiée 2 fois.

La figure 5.9 donne aussi les coordonnées du centre de gravité de la section effective,  $G_e$ , calculées pour une compression uniforme égale à la limite élastique  $f_y$ . C'est un point situé entre le centre de torsion, C, et le centre de gravité de la section pleine, G. Si on considère que la charge centrée est, en fait, une charge excentrée par rapport au centre de gravité de la section effective à  $f_y$ , comme proposé dans la méthode de dimensionnement de l'Eurocode 3 - paragraphe 3.4, on peut formuler deux remarques:

- a) Eu égard à cette excentricité, en ce qui concerne le voilement, le sens défavorable de la flèche initiale est négatif;
- b) Le centre de gravité de la section effective à  $f_y$  est d'autant plus loin du centre de gravité de la section pleine que les ailes sont plus minces. COSTA FERREIRA et RONDAL [49] ont constaté analytiquement que la similitude entre le flambement par torsion et le voilement des ailes est d'autant plus forte que les ailes sont plus minces. Or, la méthode de dimensionnement de l'Eurocode 3, qui tient compte de l'excentricité de la charge (centrée dans la section pleine) par rapport au centre de gravité de la section effective à  $f_y$ , est d'autant plus conservative que le rapport  $b_p/t$  est plus grand (ailes plus minces) pour les tronçons longs de cornière.

Finalement, la figure 5.11 montre les courbes de charge x déplacement pour un profil du type CL400 avec une flèche initiale de  $+0,2(L/1000)$  et pour 3 valeurs différentes de la variable Iter. Elle permet de tirer les conclusions suivantes:

- a) En se reportant au tableau 5.11, on note que la flèche initiale utilisée correspond à une transition entre le flambement par flexion-torsion et le flambement par flexion lorsqu'on considère le voilement. Or, l'examen de la figure 5.11 montre que la pièce flamberait par flexion; pourtant, à cause du voilement, le sens de déplacement s'inverse ce qui donne ensuite un flambement par flexion-torsion. On peut conclure que le voilement a favorisé le flambement par flexion-torsion;
- b) On rappelle que la variable Iter est le nombre des premières itérations de chaque pas dans lesquelles on fait varier la largeur effective. Cette figure montre que la courbe charge x déplacement reste inchangée pour des valeurs d'Iter plus grandes ou égales à 6. En plus, l'effort de calcul est aussi pratiquement le même lorsqu'on compare le nombre d'itérations totales du calcul numérique nécessaires pour achever la même quantité de pas non-linéaires. La raison pour laquelle on a choisi Iter égale à 6 et pas plus petit que 6, c'est que l'élément fini est très sensible à la variation de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord. Il faut qu'il y ait entre les pas du calcul non-linéaire un maximum de continuité dans la variation de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord.

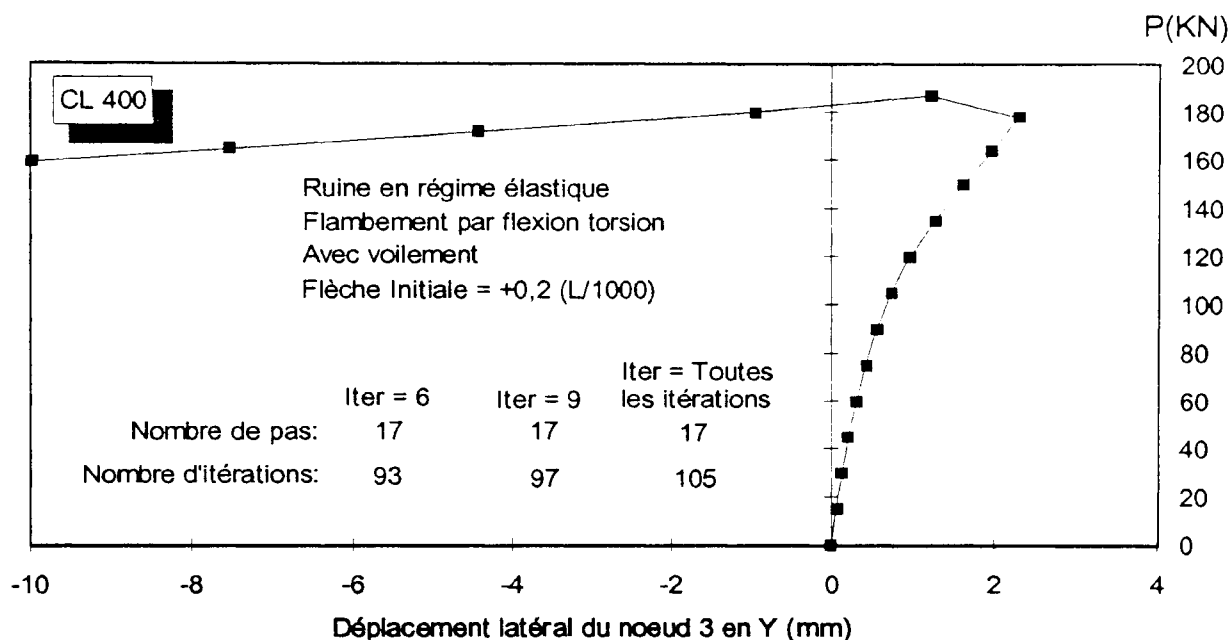


Figure 5.11- Courbes de charge x déplacement.

### 5.3. PROFIL U

#### 5.3.1. Introduction

Dans une recherche expérimentale réalisée à l'Université de Liège et qui a fait partiellement l'objet de la thèse de doctorat de BATISTA, on a étudié la stabilité de colonnes en profils U et C pliés à froid et soumises à la compression centrée et excentrée [50]. Cette recherche expérimentale est, à notre connaissance, pionnière dans l'étude de la stabilité de tronçons longs de profils U. Les résultats expérimentaux des profils U de BATISTA seront confrontés à des résultats numériques obtenus dans le cadre de cette thèse.

Dans la recherche expérimentale citée ci-dessus, on a mesuré les imperfections géométriques (dimensions de la section, longueur, déformée initiale globale et locale) et les imperfections structurales (contraintes résiduelles et dispersion de la limite élastique). Toutes ces mesures et les résultats des essais de compression sont répertoriés dans les rapports d'essais, [83,84]. La figure 5.12 montre les notations utilisées pour les caractéristiques géométriques de la section transversale. Le tableau 5.12 donne le rayon interne de pliage et la limite élastique pour les différentes épaisseurs utilisées. Les autres mesures des dimensions des sections et des longueurs des profils seront données au fur et à mesure de la présentation des résultats numériques.



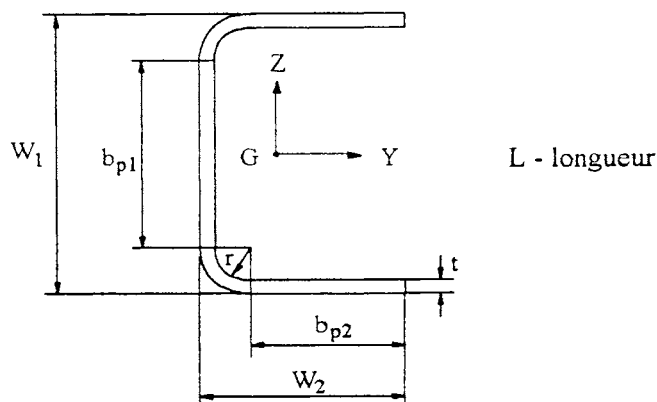


Figure 5.12- Les caractéristiques géométriques du profil U.

Epaisseur $t$ (mm)	Rayon Interne de Pliage $r$ (mm)	Limite Elastique $f_y$ (MPa)
1,5	1,5	376
2	2	397
3	2	360
4	2	390

Tableau 5.12-Rayon interne de pliage et limite élastique des profils U.

Ici aussi, l'acier utilisé est le même que pour la cornière - ST 52 et la limite élastique donnée au tableau 5.12 est la moyenne des essais de traction réalisés sur des éprouvettes prélevées au milieu des faces des profils. De la même façon, elles sont considérées comme la limite élastique des bandes mères à partir desquelles on a fabriqué les profils.

### 5.3.2. Tronçon court

Les dimensions moyennes de la section, la longueur, la charge de ruine expérimentale, les charges de ruine numériques obtenues avec les approches de l'Eurocode 3, proposition B et proposition A, ainsi que les rapports charge de ruine expérimentale-numérique pour les tronçons courts sont donnés au tableau 5.13. On rappelle que la charge de ruine calculée pour le tronçon court par voie numérique est en fait égale à l'aire effective, pour une compression uniforme égale à  $f_y$ , fois la limite élastique  $f_y$ .

L'examen des données statistiques de ce tableau montre que les 3 approches donnent de bons résultats. La proposition B est moins conservatrice que l'Eurocode 3 parce qu'elle utilise la formule de Kalyanaraman (2.49) pour définir la ruine de la plaque appuyée sur un seul bord, alors que l'Eurocode 3 préconise la formule de Winter (2.40). Quant à la proposition A, on rappelle qu'elle utilise, en plus, les coefficients de voilement des plaques qui tiennent compte de l'interaction en voilement entre elles. La moyenne du rapport

$P_{exp}/P_r$  est très proche de 1 pour les propositions A et B. Pour les tronçons courts, la prise en compte de l'interaction en voilement n'est pas impérative pour obtenir une bonne corrélation numérique-expérimentale quant à la charge de ruine.

Profil	Section W <sub>1</sub> xW <sub>2</sub> xt	Longueur (mm)	P <sub>exp</sub> (KN)	P <sub>r</sub>			P <sub>exp</sub> /P <sub>r</sub>		
				Eurocode	Prop. B	Prop. A	Eurocode	Prop. B	Prop. A
U13	37x19x2.07	70	# 65	56,0	56	56,0	1,16	1,16	1,16
U15-1	75x38x2.04	100	111	95,7	101,2	103,5	1,16	1,10	1,07
U15-2	75x37x2.04	98	102	95,7	100,5	102,7	1,07	1,01	0,99
U15-3	75x38x2.04	100	102	95,7	101,2	103,5	1,07	1,01	0,99
U15-4	75x38x2.02	98	109	94,8	99,4	101,8	1,15	1,10	1,07
U15-5	75x38x2.02	100	104	94,8	99,4	101,8	1,10	1,05	1,02
U15-6	75x38x2.02	100	92	94,8	99,4	101,8	0,97	0,93	0,90
U15-7	75x38x2.02	100	90	94,8	99,4	101,8	0,95	0,91	0,88
U15-8	75x38x2.02	100	105	94,8	99,4	101,8	1,11	1,06	1,03
U18	94x47x2.04	250	100	102,0	108,6	102,3	0,98	0,92	0,98
U22	113x55x2.05	298	107	107,4	114,6	118,5	1,00	0,93	0,90
U24	52x39x3.97	152	# 209	183,7	183,7	183,7	1,14	1,14	1,14
U26	50x40x2.02	274	81	77,9	83,5	88,6	1,04	0,97	0,91
U29	63x51x2.08	240	102	94,1	101	101,9	1,08	1,01	1,00
U33	76x60x2.06	399	109	101,0	108,4	105,9	1,08	1,01	1,03
U35	42x40x3.99	153	# 190	172,0	172	172,0	1,10	1,10	1,10
U37-1	41x41x2.06	173	88	73,2	78,7	80,6	1,20	1,12	1,09
U37-2	41x41x2.04	173	80	72,0	77,5	79,3	1,11	1,03	1,01
U37-3	42x41x2.02	173	76	72,0	77,3	80,6	1,06	0,98	0,94
U40	51x51x2.04	224	93	81,9	88,7	88,1	1,14	1,05	1,06
U44	64x62x2.05	413	97	94,0	101,8	98,4	1,03	0,95	0,99
					Moyenne	= 1,07	= 1,01	= 0,99	
					Ecart type	= 0,07	= 0,06	= 0,06	
					Coefficient de Variation (%)	= 6,44	= 6,35	= 6,32	
					Remarques:				
- (#) - Ces profils ont été négligés dans les statistiques parce que P <sub>exp</sub> > (f <sub>y</sub> × Aire) et ils n'ont pas voilé numériquement.									
- Pour le calcul numérique de P <sub>r</sub> on a dû empêcher les noeuds intermédiaires (non-appuyés) de tourner autour de y et z, et de gauchir pour éviter de l'instabilité numérique.									

Tableau 5.13- Résultats des tronçons courts de profil U.

Les figures 5.13 à 5.15 montrent les courbes de charge x raccourcissement expérimentales pour les 3 approches concernées. Le paramètre qui a conduit au choix des tronçons courts (U15-3, U33 et U44) de ces figures est le rapport  $W_2/W_1$ , égal à 0,5 , 0,8 et 1,0 aux figures 5.13, 5.14 et 5.15, respectivement. L'examen de ces figures permet de faire les remarques suivantes:

- a) On note que les courbes numériques des 3 approches sont coïncidentes près de l'origine - section prè-voilée; et qu'à partir d'une certaine valeur de la charge, les courbes divergent pour suivre des chemins différents - section post-voilée. Or, on constate qu'en régime prè-voilé les courbes expérimentales sont d'autant plus flexibles par rapport aux courbes numériques prè-voilées que le rapport  $W_2/W_1$  est plus petit. BATISTA a mesuré le raccourcissement à l'aide de 4 capteurs de déplacements installés entre les deux plateaux de la presse, un à chaque coin. La moyenne des mesures des capteurs de déplacements a été enregistrée automatiquement. Lors d'une recherche expérimentale sur la stabilité des tronçons courts de profils U et C, MULLIGAN [33] a dû faire face à ce même type de problème. Il a constaté que le raccourcissement calculé à l'aide de la moyenne des déformations mesurées par des jauges électriques installés aux coins de la section était en meilleur accord avec les valeurs numériques en régime prè-voilé. MULLIGAN pense que les imperfections des extrémités des tronçons courts sont à l'origine de ce problème. En fait, ces imperfections empêchent le tronçon court de porter uniformément sur les plateaux de la machine d'essais avant la mise en charge. Donc, l'enregistrement au moyen des capteurs de déplacements mesure aussi les déplacements supplémentaires nécessaires pour résorber ces imperfections des sections des extrémités;
- b) Quant aux courbes numériques, on voit que la proposition A passe progressivement du stade prè-voilé au stade post-voilé, tandis que la proposition B et l'Eurocode 3 présentent un point anguleux à l'endroit de ce passage. Aussi, d'une manière générale, l'allure des courbes de la proposition A est en meilleur accord avec la courbe expérimentale.

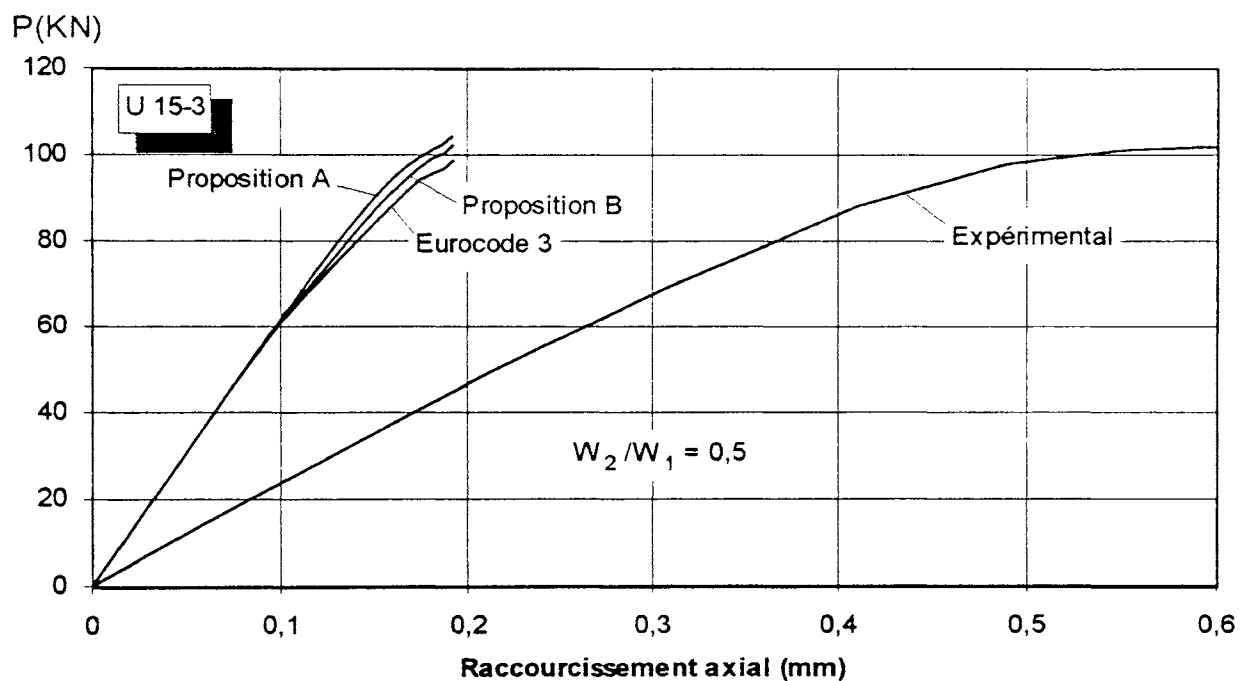


Figure 5.13- Courbes de charge x raccourcissement.

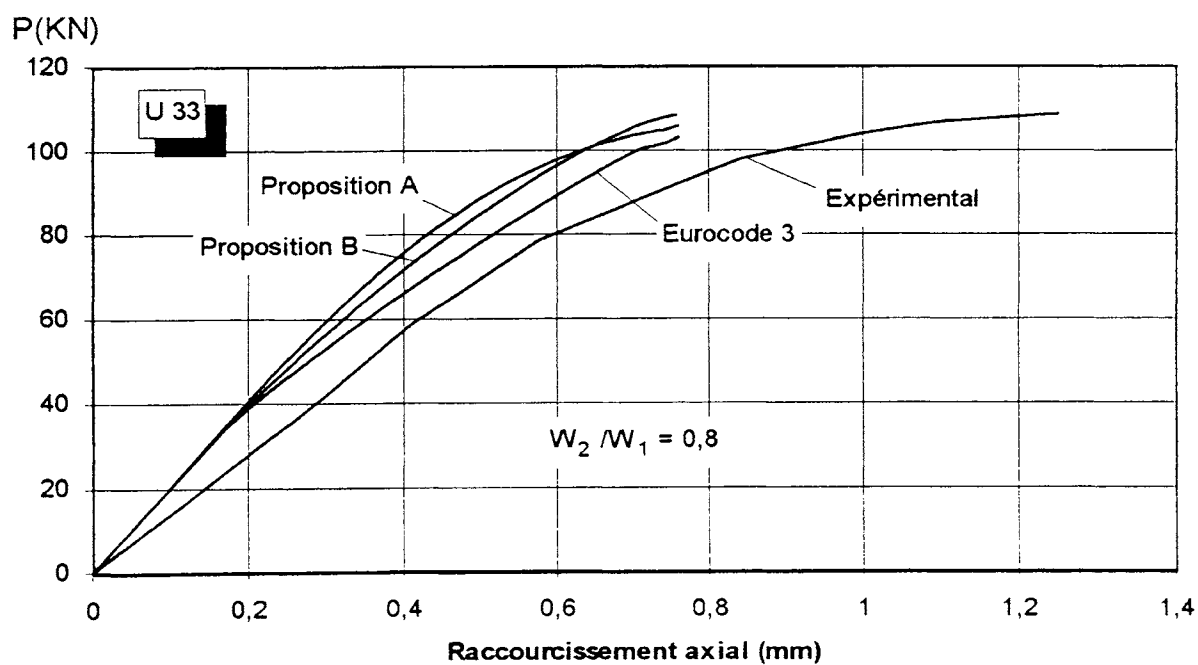


Figure 5.14- Courbes de charge x raccourcissement.

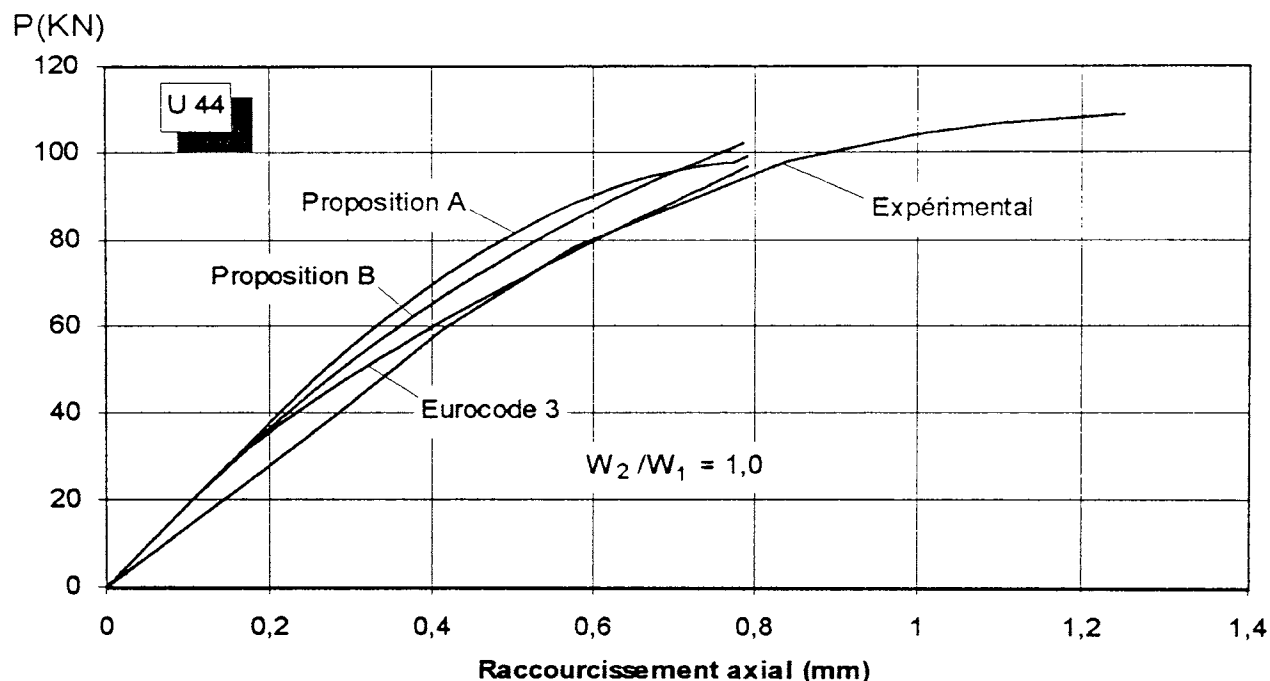


Figure 5.15- Courbes de charge x raccourcissement.

### 5.3.3. Tronçon long

Le tableau 5.14 montre la charge de ruine expérimentale, les charges de ruine numériques selon les approches de l'Eurocode 3, de la proposition B et de la proposition A pour les profils avec charge centrée et dont la déformée initiale a été mesurée. Cette fois, au lieu d'utiliser la déformée réelle, on a utilisé une sinusoïde équivalente à la déformée réelle dont la flèche maximale équivalente est aussi donnée sur ce tableau. On a fait ainsi car le but n'était autre que celui de comparer les résultats des différentes approches afin de pouvoir choisir celle qui donne les meilleurs résultats.

L'examen de ce tableau montre que l'approche de l'Eurocode 3 est fort conservatrice. La proposition B montre que si on utilise la proposition de Mulligan combinée avec la formule de Winter (pour la plaque appuyée aux deux bords) et combinée avec la formule de Kalyanaraman (pour la plaque sur un seul bord), on obtient des résultats moins conservatifs que l'Eurocode 3. Néanmoins, les résultats de la proposition B sont quand même conservatifs. Pour obtenir une bonne corrélation numérique-expérimentale, il a fallu, en plus, utiliser des coefficients de voilement des plaques qui tiennent compte de l'interaction en voilement entre elles - proposition A, comme montré sur ce tableau. On peut donc conclure que la prise en compte de l'interaction en voilement entre les plaques du profil U est indispensable pour l'obtention d'une bonne estimation de charge de ruine. Il est intéressant de rappeler que dans la proposition A les coefficients de voilement restent inchangés et donc ils ne tiennent pas compte du changement progressif du gradient de contraintes sur la section en cours de chargement. Par contre, pour la plaque appuyée

sur un seul bord, sa largeur effective est calculée avec la contrainte moyenne sur la largeur  $b_e$  (voir paragraphe 2.6.1).

Profil	Flèche Mesurée		P <sub>exp</sub> (KN)	P <sub>r</sub> (KN)			Δ%		
	Sinusoïde Equivalente			Eurocode	Prop. B	Prop. A	Eurocode	Prop. B	Prop. A
	(f <sub>oy</sub> /L) ‰	(f <sub>oz</sub> /L) ‰							
U14-1	0,146	0,169	98	61	66,2	88,0	-37,8%	-32,4%	-10,2%
U19	0,033	0,037	87	53,3	68,8	83,6	-38,7%	-20,9%	-3,9%
U21	-0,227	0,009	81	45	53,4	62,2	-44,4%	-34,1%	-23,2%
U36-1	0,107	0,008	60	46,2	52,1	61,5	-23,0%	-13,2%	2,5%
Remarque:									
– Δ% = (P <sub>r</sub> - P <sub>exp</sub> ) / P <sub>exp</sub> * 100									

Tableau 5.14- Résultats des tronçons longs sous charge centrée avec une déformée initiale égale à la sinusoïde équivalente à la déformée réelle.

Le tableau 5.15 montre les dimensions moyennes des sections, les longueurs, les charges critiques en flexion et en flexion-torsion (avec gauchissement libre et empêché aux extrémités), le mode de ruine expérimental (F-flexion, FT-flexion-torsion), les charges de ruine expérimentales et numériques calculées avec la proposition A et les rapports charge de ruine expérimentale-numérique pour les profils essayés avec chargement centré. La déformée initiale utilisée est du type sinusoïdal avec la flèche maximale égale à  $L/1000$  dans le sens défavorable. Pour les profils U essayés par BATISTA, le centre de gravité de la section effective pour une compression uniforme égale à  $f_y$  se situe entre l'âme et le centre de gravité de la section pleine. Donc, le sens défavorable selon l'axe y est le sens négatif lorsque la charge est centrée, voir figure 5.1d. L'examen de ce tableau permet de faire les remarques suivantes:

- En comparant les colonnes de  $P_R (k_{33} = 1)$  et de  $P_{exp}$  on observe que pour la plupart des profils la charge de ruine expérimentale est plus grande que la charge critique de flexion-torsion avec gauchissement libre aux extrémités. Ceci est à la base de l'hypothèse faite que les plateaux de la presse d'essai empêchent tout gauchissement des sections des extrémités. Ainsi, on considère que la charge critique de flexion-torsion est celle calculée avec le gauchissement empêché aux extrémités ( $k_{33} = 4$ ). BATISTA [50], lui aussi, a fait cette même hypothèse lors du calcul des prévisions théoriques de la charge de ruine par des méthodes semi-empiriques et il a obtenu une bonne corrélation théorique-expérimentale;
- La comparaison entre les colonnes de  $P_f$  et de  $P_R (k_{33} = 4)$  pour les profils U12 au U23 montre que le mode critique de flambement théorique est par flexion. Malgré cela le mode de ruine expérimentale pour la plupart de ces profils est de flexion-torsion. Le mode de ruine numérique trouvé par élément fini est en accord avec la prévision théorique, c'est à dire, flexion. Les profils qui n'ont pas voilé numériquement sont

exclus des calculs statistiques. La moyenne des rapports de charge de ruine expérimentale-numérique montre que les résultats numériques sont très conservatifs quand le flambement est par flexion. Eu égard à ce conservatisme, on peut formuler deux hypothèses: la flèche initiale utilisée,  $L/1000$ , serait trop grande par rapport à la flèche réelle (voir tableau 5.14), d'une part, et les coefficients de voilement des plaques de la proposition A ne tiennent pas compte du changement progressif du gradient de contraintes sur la section, d'autre part;

- c) L'examen des charges critiques des profils U25 à U43 montre que leur mode critique est par flexion-torsion, ce qui est en accord avec le mode de ruine expérimental. Le mode de ruine trouvé par élément fini est aussi égal au mode critique de flambement. Les profils qui n'ont pas voilé numériquement sont négligés dans les calculs statistiques. Les résultats statistiques montrent que la corrélation numérique-expérimentale est bonne et se place du côté conservatif avec une faible dispersion.

A titre illustratif, les figures 5.16a et 5.16b montrent les déformées à la ruine du profil U19, mode de ruine de flexion, et du profil U42, mode de ruine de flexion-torsion, du tableau 5.15, respectivement.

Profil	Section $W_2 \times W_1 \times t$	$W_2/W_1$	Longueur	$P_f$	$P_{ft}$ $k_{33}=1$	$P_{ft}$ $k_{33}=4$	Mode de Ruine	$P_{exp}$	$P_r$	$P_{exp}/P_r$
U12	37x19x2.07	0,51	352	81	80	176	F	51	*# 45,2	1,13
U14-1	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	98	* 73,8	1,33
U14-2	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	97	* 73,8	1,31
U14-3	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	89	* 73,8	1,21
U14-4	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	98	* 73,8	1,33
U14-5	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	87	* 73,8	1,18
U14-6	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	90	* 73,8	1,22
U14-7	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	93	* 73,8	1,26
U14-8	75x38x2.03	0,51	813	132	92	272	FT	92	* 73,8	1,25
U16	94x47x2.04	0,50	1002	169	111	352	F	97	75,8	1,28
U17	94x47x2.04	0,50	1252	108	77	230	FT	87	65,3	1,33
U19	113x55x2.05	0,49	1209	191	126	413	FT	87	76,6	1,14
U21	113x55x2.05	0,49	1814	85	63	189	FT	81	55,9	1,45
U23	52x39x3.97	0,75	752	262	189	319	F	133	*# 148,0	0,90
U25	50x40x2.02	0,80	854	119	47	112	FT	68	* 65,9	1,03
U27	63x51x2.08	0,81	1092	158	55	143	FT	84	70,2	1,20
U28	63x51x2.08	0,81	1366	101	40	94	FT	71	61,4	1,16
U30	76x60x2.06	0,79	1333	175	59	164	FT	75	69,8	1,07
U31	76x60x2.06	0,79	1664	112	42	108	FT	68	61,0	1,11
U32	76x60x2.06	0,79	1999	78	33	77	FT	63	51,8	1,22
U34	42x40x3.99	0,95	759	254	142	208	FT	129	*# 137,9	0,94
U36-1	41x41x2.04	1,00	873	114	34	72	FT	60	* 55,0	1,09
U36-2	41x41x2.04	1,00	873	114	34	72	FT	56	* 55,0	1,02
U38	51x51x2.04	1,00	1113	138	36	85	FT	69	58,6	1,18
U39	51x51x2.04	1,00	1391	89	27	57	FT	53	47,7	1,11
U41	62x62x2.05	1,00	1377	166	39	100	FT	65	62,1	1,05
U42	62x62x2.05	1,00	1722	106	29	66	FT	58	* 52,3	1,11
U43	62x62x2.05	1,00	2065	74	23	48	FT	48	41,1	1,17
					$P_{exp}/P_r$		U12 au U23		U25 au U43	
					Moyenne		= 1,27		= 1,12	
					Ecart type		= 0,08		= 0,06	
					Coef. de Var.(%)		= 6,62		= 5,70	
Remarques :										
- Mode de Ruine Experimental - F - flambement par flexion, FT - flambement par flexion-torsion.										
- $P_r$ obtenue avec flèche initiale de $L/1000$ dans le sens défavorable en y et z.										
- $P_r$ (#) Ces profils n'ont pas voilé numériquement et sont négligés dans les statistiques.										
- $P_r$ (*) Ruine numérique limitée par début de plastification. Les autres -ruine en régime élastique.										
- Les profils U12 au U23 flambent par flexion.										
- Les profils U25 au U43 flambent par flexion-torsion.										

Tableau 5.15- Résultats des tronçons longs avec charge centrée.



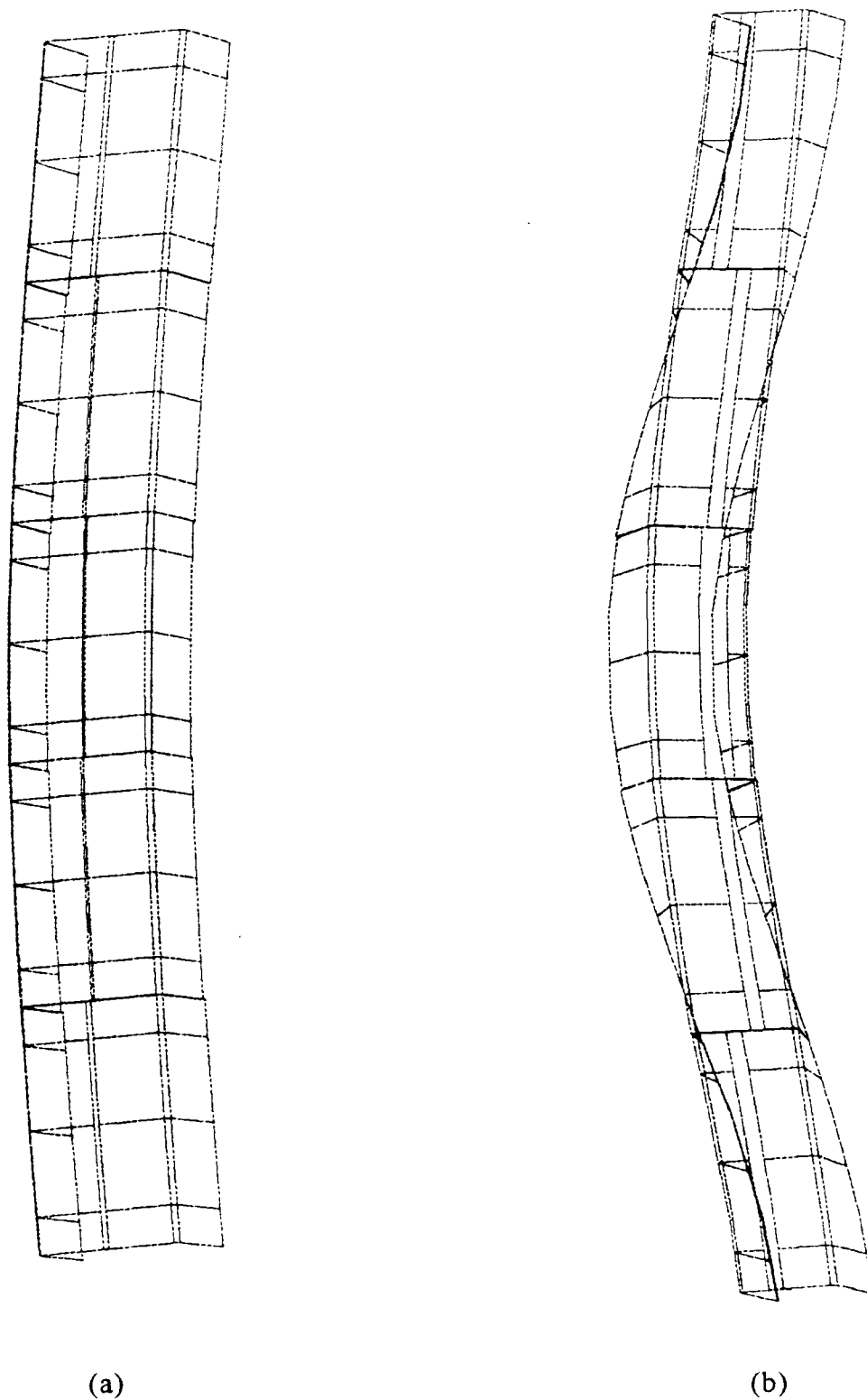


Figure 5.16- Visualisation de la déformée à la ruine, flèche initiale égale à  $-L/1000$ .  
(a) Profil U19, déformée amplifiée 10 fois;  
(b) Profil U42, déformée amplifiée 5 fois.

BATISTA a aussi essayé des profils U avec charge excentrée. Les profils ont été essayés avec les deux cas de charge présentés à la figure 5.17. Les variables  $i_y$  et  $i_z$  sur cette figure sont les rayons de giration autour des axes  $y$  et  $z$ , respectivement. Les excentricités de charge adoptées sont égales à 20% du rayon de giration. Le tableau 5.16 montre les valeurs des excentricités des deux cas de charge pour les profils dont les dimensions nominales, les longueurs, les charges critiques, cas de charge, mode de ruine expérimental (PL-mécanisme plastique), les charges de ruine expérimentales et numériques obtenues avec la proposition A et les rapports de charge de ruine expérimentale-numérique sont donnés au tableau 5.17.

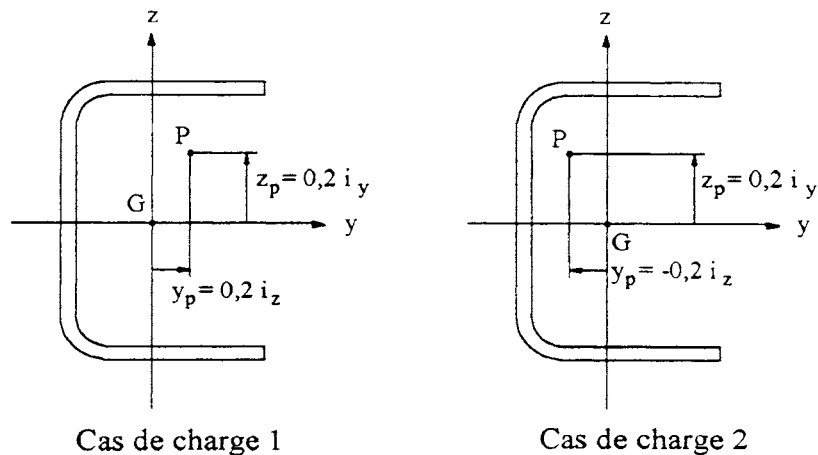


Figure 5.17- Cas de charges excentrées.

Profil	Excentricité	
	$y_p$ (mm)	$z_p$ (mm)
UE11, UE21, UE31	5	12
UE12, UE22, UE32	-5	12
UE41, UE51, UE61	5,5	9
UE42, UE52, UE62	-5,5	9
UE71, UE81, UE91	6	7
UE72, UE82, UE92	-6	7

Tableau 5.16- Les excentricités de chargement.

Les charges critiques de flexion-torsion données au tableau 5.17 tiennent compte de l'excentricité de la charge. La déformée initiale est aussi sinusoïdale avec la flèche maximale égale à  $L/1000$  dans le sens défavorable. On considère que le sens défavorable est opposé à l'excentricité de la charge par rapport au centre de gravité de la section pleine. On voit que les valeurs de  $L/1000$  sont petites par rapport aux excentricités, donc la déformée initiale n'a pas une influence très importante sur la charge de ruine. L'examen de ce tableau permet de faire les remarques suivantes:

- a) Les profils avec le cas de charge 1 (bord libre de la semelle plus comprimé) atteignent la ruine avec la formation d'un mécanisme plastique, alors que le calcul numérique a indiqué que tous les profils (cas de charge 1 et 2) ont atteint la ruine par le début de plastification;
- b) Pour les profils UE11 à UE32,  $P_{ft}(k_{33} = 4)$  est plus petite mais très proche de  $P_f$ . Néanmoins, le mode de ruine expérimental est de flexion dans les cas de charge 2. Le mode de ruine trouvé par élément fini est aussi de flexion pour les deux cas de charge;
- c) Pour les profils UE41 à UE91 l'examen des charges critiques montre que le mode critique est de flexion-torsion. Le mode de ruine expérimentale est de flexion-torsion dans les cas de charge 2. Le mode de ruine trouvé par élément fini est aussi de flexion-torsion pour les deux cas de charge;
- d) Normalement on doit s'attendre à ce que moins est élancée la pièce (longueur plus courte, par exemple), plus grande doit être sa charge de ruine expérimentale. Or, on constate qu'il arrive justement le contraire avec les profils UE41 et UE51 lorsqu'on compare leurs charges de ruine expérimentale entre elles et avec celle du profil UE61. La cause de ce fait pourrait être une erreur du point d'application de la charge excentrée, soit à cause des imperfections géométriques de la section du profil, soit à cause d'une erreur de la mise en place du profil sur la machine d'essai. BATISTA [50] a aussi vérifié que, pour ce type de profil, la charge critique de flexion-torsion est très sensible à l'excentricité de la charge. A cause des motifs expliqués ci-dessus, on a négligé les profils UE41 et UE51 dans les calculs statistiques présentés dans ce tableau;
- e) L'examen des calculs statistiques pour les deux cas de charge montre que pour le cas charge 1 (bord libre de la semelle plus comprimé) la corrélation numérique-expérimentale est bonne, alors que pour le cas de charge 2 (âme plus comprimée) les résultats numériques se placent plutôt du côté conservatif. Cette différence quant au niveau de conservatisme pour les deux cas de charge est certainement due au fait que, dans la proposition A, les coefficients de voilement des plaques sont ceux de la section uniformément comprimée et, en plus, ils ne tiennent pas compte du changement progressif du gradient de contraintes sur la section.

Profil	Section $W_1 \times W_2 \times t$	$W_2/W_1$	Longueur L	$P_f$	$P_{ft}$ $k_{33}=1$	$P_{ft}$ $k_{33}=4$	Cas de Charge	Mode de Ruine	$P_{exp}$	$P_r$	$P_{exp}/P_r$
UE11	154x77x3	0,5	1318	638	342	627	1	PL	136	127,9	1,06
UE12	154x77x3	0,5	1318	638	433	629	2	F	204	155,3	1,31
UE21	154x77x3	0,5	1757	359	203	353	1	PL	125	115,4	1,08
UE22	154x77x3	0,5	1757	359	256	354	2	F	171	139,1	1,23
UE31	154x77x3	0,5	2196	230	139	226	1	PL	111	101,4	1,09
UE32	154x77x3	0,5	2196	230	174	227	2	F	144	121	1,19
UE41	105x84x3	0,8	1485	561	155	446	1	PL	88	115,4	# 0,76
UE42	105x84x3	0,8	1485	561	201	519	2	FT	144	130,9	1,10
UE51	105x84x3	0,8	1980	315	97	257	1	PL	91	105,3	# 0,86
UE52	105x84x3	0,8	1980	315	126	295	2	FT	133	115,5	1,15
UE61	105x84x3	0,8	2475	202	70	169	1	PL	97	92,8	1,05
UE62	105x84x3	0,8	2475	202	90	191	2	FT	123	99,3	1,24
UE71	89x89x3	1,0	1577	549	105	292	1	PL	109	109,7	0,99
UE72	89x89x3	1,0	1577	549	137	362	2	FT	128	119,8	1,07
UE81	89x89x3	1,0	2102	309	68	170	1	PL	94	98,8	0,95
UE82	89x89x3	1,0	2102	309	88	210	2	FT	117	103,8	1,13
UE91	89x89x3	1,0	2628	198	50	113	1	PL	88	85	1,04
UE92*	89x89x3	1,0	2628	198	65	139	2	-	-	88,5	-
									$P_{exp}/P_r$	Cas 1	Cas 2
									Moyenne	= 1,04	= 1,18
									Ecart type	= 0,09	= 0,09
									Coef. de Var.(%)	= 8,37	= 7,51
Remarques :											
- Mode de ruine experimental:											
PL - mécanisme plastique											
F - flambement par flexion											
FT - flambement par flexion-torsion											
- UE92 * - Essai non valable.											
- Pr obtenu avec flèche initiale de L/1000 dans le sens défavorable en y et z.											
Ici le sens défavorable est opposé à l'excentricité par rapport au centre de gravité.											
- Ruine numérique de tous les profils limitée par le début de plastification.											
- (#) - Ces profils sont négligés dans les statistiques.											
- Les profils UE11 au UE32 flambent par flexion.											
- Les profils UE41 au UE92 flambent par flexion-torsion.											

Tableau 5.17- Résultats des tronçons longs avec charge excentrée.

#### **5.3.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine**

Le but de ce paragraphe est de tenter de mieux comprendre l'influence de l'amplitude et du sens de la déformée initiale de type sinusoïdal sur la charge de ruine pour les différents modes d'instabilité. Dans ce but, les tableaux 5.18 et 5.19 donnent les charges de ruine sans et avec voilement pour plusieurs valeurs de flèches initiales des profils U19 (flambement par flexion) et U42 (flambement par flexion-torsion), respectivement, tous les deux avec charge centrée. On rappelle que le comportement post-critique est stable lorsque le flambement est par flexion. C'est pourquoi dans la colonne de charge de ruine sans voilement et en élasticité pure au tableau 5.18, on trouve la même valeur pour n'importe quelle valeur de la flèche initiale. Les figures 5.18 et 5.19 montrent la représentation graphique des données des tableaux 5.18 et 5.19, respectivement. L'examen de ces deux tableaux et de ces deux figures permet de faire les remarques suivantes:

- a) Dans les deux cas, profils U19 et U42, le sens négatif de la flèche initiale (voir figure 5.1d) a été le sens défavorable et ce, sans voilement ou avec voilement. Ceci est dû au fait que le centre de gravité de la section effective, pour une compression uniforme égale à  $f_y$ , pour les géométries des profils U essayés par BATISTA se situe entre l'âme et le centre de gravité de la section pleine, ce qui fait que le sens défavorable de la flèche avec voilement pris en compte soit le même sens défavorable si on néglige le voilement;
- b) En considérant la charge de ruine avec voilement, on note que lorsque le flambement est par flexion-torsion, figure 5.19, la charge de ruine est maximale pour la flèche nulle, tandis que lorsque le flambement est par flexion, figure 5.18, la charge de ruine maximale se produit pour une flèche de  $(+L/1000)$  dans le cas du profil U19. Cette constatation peut être mieux comprise à l'aide des figures 5.20 et 5.21 où on montre le déplacement du noeud 3 dans la direction Y (voir figure 5.1a) et le déplacement du centre de gravité de la section effective de l'élément fini 3 dans cette même direction, respectivement, pour plusieurs valeurs de la flèche initiale du profil U19. La figure 5.20 montre que pour des petites flèches initiales positives il y a une inversion du sens de déplacement, du sens positif vers le sens négatif. Cette tendance à se déplacer dans le sens négatif s'explique par le fait que le centre de gravité de la section effective, à  $f_y$ , se situe à gauche du point d'application de la charge, comme illustré à la figure 5.21. Ainsi, la charge de ruine maximale n'est atteinte que pour une flèche positive assez grande pour s'opposer à cette tendance.

U19			
Déf. Initiale Sinusoïdale $f_o / (L/1000)$	$P_r$ (KN) Sans Voilement		$P_r$ (KN) Avec Voilement
	Elasticité pure	Elasto-plastique	Elasto-plastique
-2,0	191,0	PL 109,8	PL 71,5
-1,0	191,0	PL 126,4	EL 76,6
-0,5	191,0	PL 139,3	EL 79,7
-0,2	191,0	PL 152,8	EL 81,7
+0,05	191,0	PL 170,0	EL 83,7
+0,2	191,0	PL 162,6	EL 84,9
+0,5	191,0	PL 151,9	EL 88,2
+1,0	191,0	PL 142,1	EL 95,2
+2,0	191,0	PL 128,3	PL 87,2
Remarques:			
- Tous -> Flambement par flexion			
- EL --> Ruine en régime élastique			
- PL --> Ruine limitée par début de plastification			
- Discrétisation avec 5 éléments finis.			

Tableau 5.18-Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine du profil U19.

U 42			
Déf. Initiale Sinusoïdale $f_o / (L/1000)$	$P_r$ (KN) Sans Voilement		$P_r$ (KN) Avec Voilement
	Elasticité pure	Elasto-plastique	Elasto-plastique
-2,0	EL 57,7	PL 55,7	PL 48,7
-1,0	EL 61,9	PL 60,9	PL 52,3
-0,5	EL 64,8	PL 64,5	PL 55,7
-0,2	EL 67,3	EL 67,3	EL 57,4
+0,05	EL 69,2	EL 69,2	EL 58,4
+0,2	EL 68,2	PL 67,9	EL 57,6
+0,5	EL 66,7	PL 66,1	EL 55,9
+1,0	EL 65,3	PL 63,2	PL 53,7
+2,0	EL 63,5	PL 58,2	PL 49,6
Remarques:			
- Tous -> Flambement par flexion-torsion.			
- EL --> Ruine en régime élastique.			
- PL --> Ruine limitée par début de plastification.			
- Discrétisation avec 5 éléments finis.			

Tableau 5.19-Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine du profil U42.

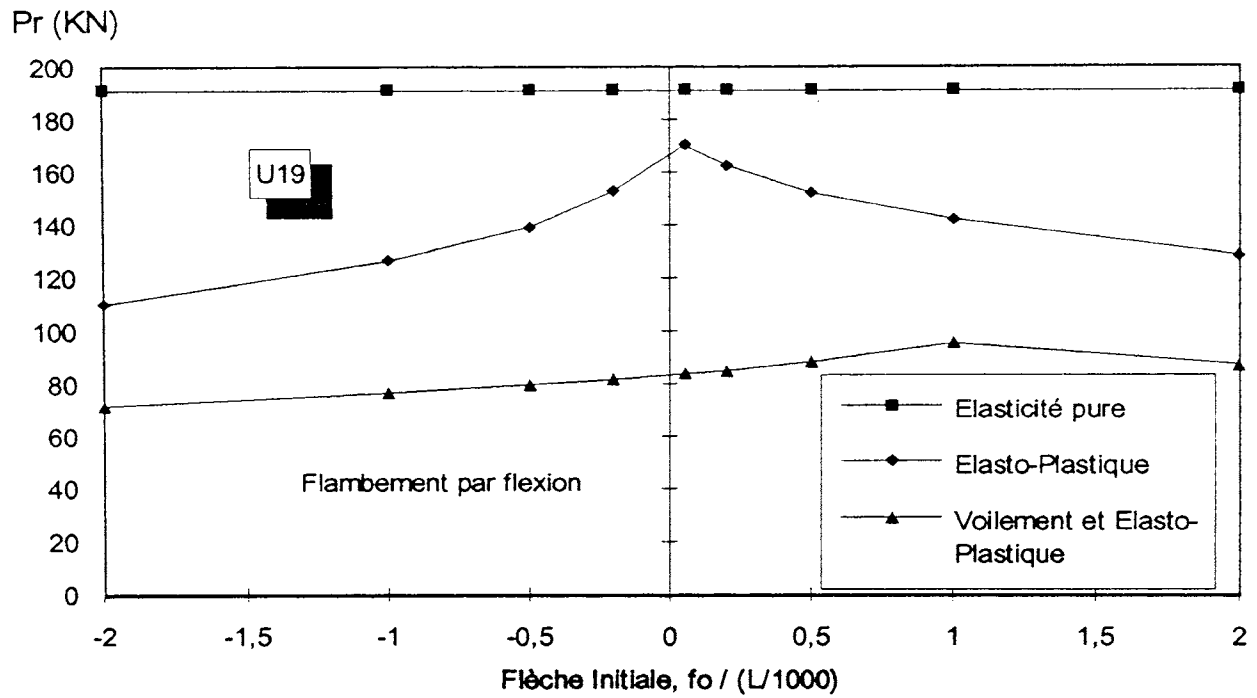


Figure 5.18- Représentation graphique du tableau 5.18.

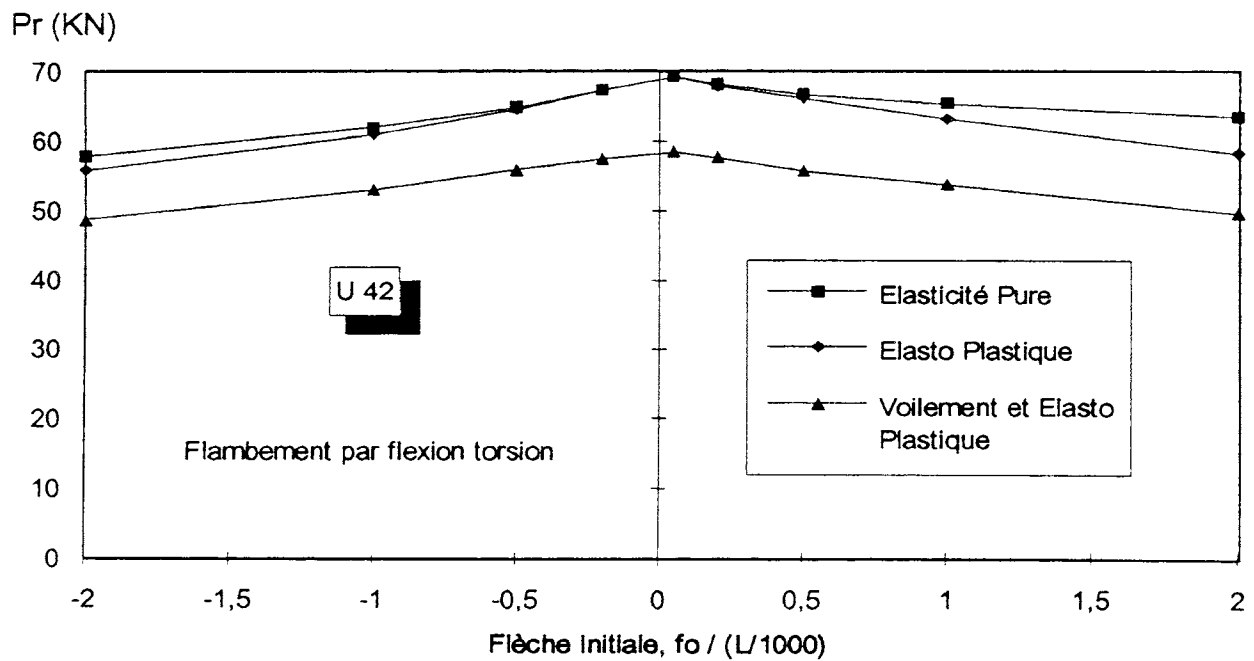


Figure 5.19- Représentation graphique du tableau 5.19.

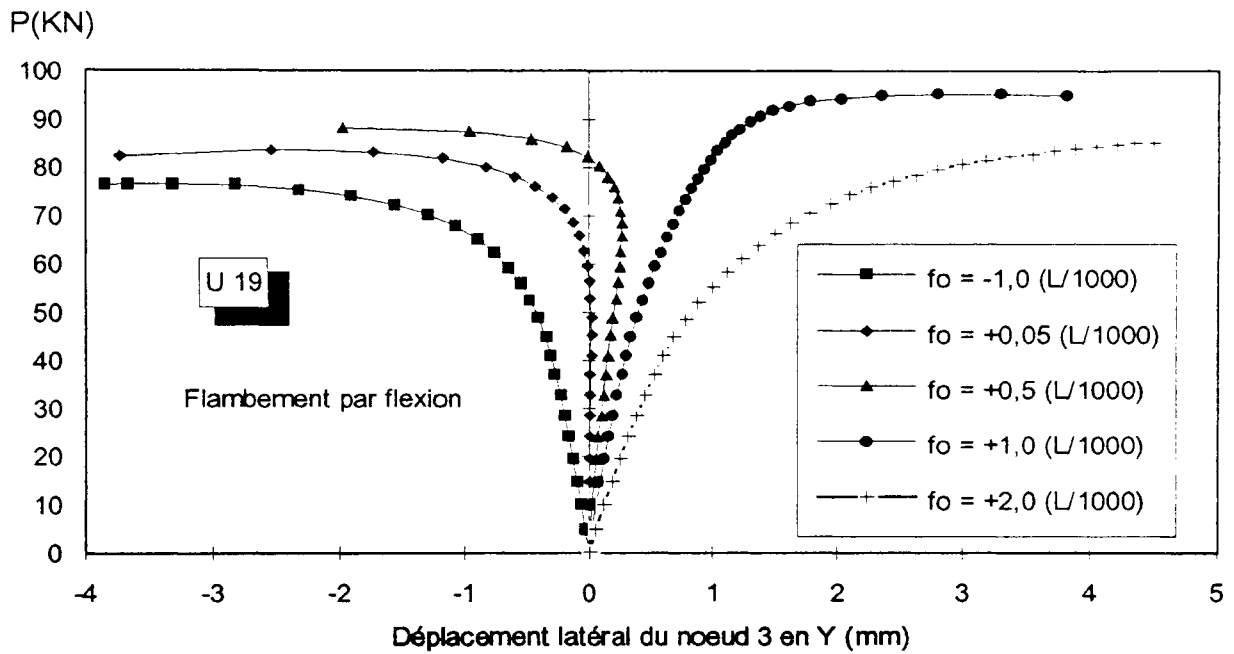


Figure 5.20- Courbes de charge x déplacement.

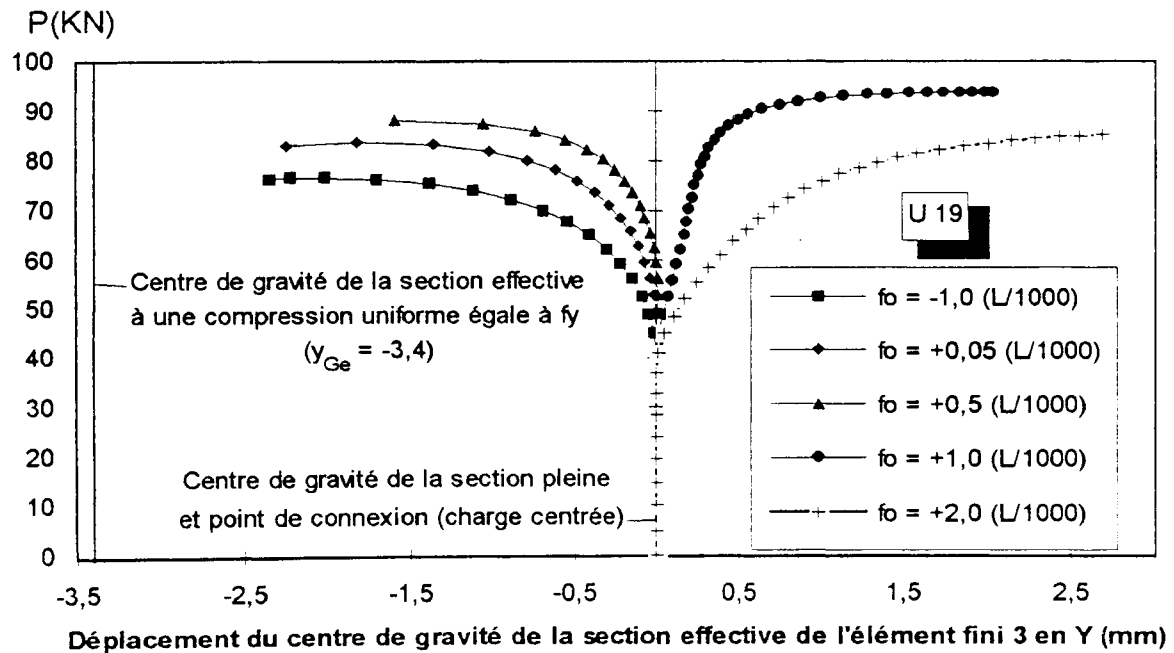


Figure 5.21- Déplacement du centre de gravité de la section effective.



Afin de justifier pourquoi on ne fait varier les largeurs effectives que sur les six premières itérations de chaque pas (Iter=6), la figure 5.22 montre les courbes de charge x déplacement du profil U19 pour trois valeurs de la variable Iter, jusqu'au sommet de la ruine en régime élastique. On note que les trois courbes sont pratiquement coïncidentes et ne diffèrent l'une de l'autre que quand les courbes sont déjà très plates. En plus, les charges de ruine données par les trois courbes sont aussi pratiquement les mêmes. C'est pourquoi on ne fait varier les largeurs effectives que sur les six premières itérations. Ainsi, on obtient un résultat tout aussi bon avec un minimum d'effort de calcul (la plus petite quantité totale d'itérations du calcul non-linéaire). Le motif pour lequel Iter n'est pas plus petit que six est qu'il faut obtenir la moindre discontinuité possible de la variation des dimensions de la section effective entre les pas du calcul non-linéaire.

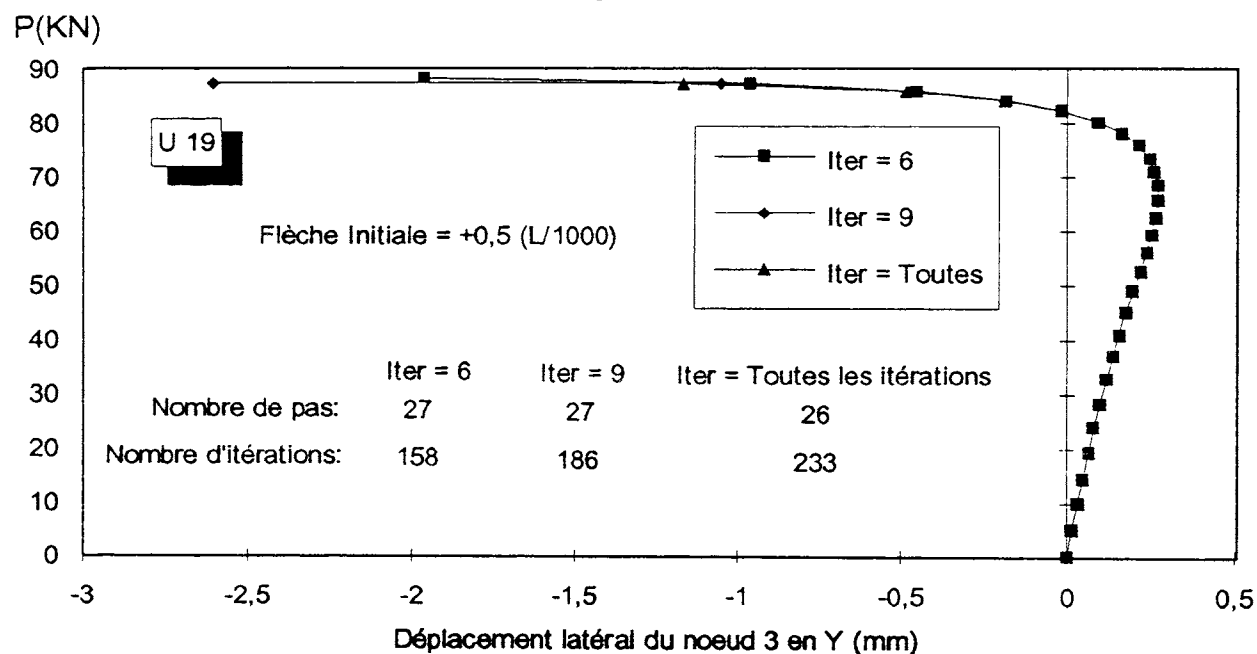


Figure 5.22- Courbes de charge x déplacement.

## 5.4. PROFIL C

### 5.4.1. Introduction

Dans une recherche expérimentale réalisée à l'Université Cornell aux Etats-Unis, MULLIGAN a étudié la stabilité de colonnes en profil C pliées à froid et soumises à compression centrée et excentrée. Cette recherche a fait l'objet de sa thèse de doctorat [33], à partir de laquelle il a publié deux articles [34,35]. Le premier article se rapporte aux essais de tronçons courts, tandis que le deuxième résume les comparaisons théorique-expérimentales pour les tronçons longs. Ses résultats expérimentaux des charges de ruine et des courbes de charge x déplacements seront comparés à des résultats numériques obtenus dans le cadre de cette thèse.

Dans cette recherche expérimentale, on a mesuré les imperfections géométriques comme les dimensions de la section, la longueur des pièces et les déformées initiales globales et locales. La figure 5.23a montre les caractéristiques géométriques de la section transversale dont les valeurs sont données aux tableaux 5.20 et 5.21 pour les tronçons courts et pour les tronçons longs, respectivement. Dans ces tableaux, la notation utilisée pour désigner les pièces est la suivante:

Tronçon court:

$$\text{SLC}/1\text{-}60 \times 30 = \text{Stub Lipped Channel} / 1 - b_{p1} / t \times b_{p2} / t$$

Tronçon long:

$$\text{CLC}/2\text{-}120 \times 60 = \text{Column Lipped Channel} / 2 - b_{p1} / t \times b_{p2} / t$$

CLC/2-120x60 → charge centrée

CLC/2.1-120x60 → charge excentrée

Les valeurs de la limite élastique données dans ces tableaux sont la moyenne des essais de traction réalisés sur des éprouvettes prélevées dans la bande mère dans la direction parallèle à la direction de pliage et ce, avant la fabrication des profils. Donc, la limite élastique utilisée dans les calculs numériques est la limite élastique du matériau de base.

Pour les tronçons longs soumis à charge excentrée, le point d'application (connexion) de la charge se situe sur l'axe de symétrie  $y$  avec  $z_p = 0$  et  $y_p \neq 0$ , voir figure 5.23a.

Quant à l'efficacité du raidisseur (ou extrémité de rive) de la semelle, MULLIGAN a dimensionné les raidisseurs de manière à satisfaire les conditions de DESMOND [51]. Pourtant, l'étude de stabilité de sections en C, paragraphe 2.4.4, a montré que l'efficacité du raidisseur est maximale lorsque le rapport  $b_3/b_1$  se situe entre 0,1 et 0,3, approximativement. Or, l'examen des tableaux 5.20 et 5.21 montre que ce rapport est même plus petit que 0,1 pour la plupart des profils. Afin de prévenir le voilement local-distorsionnel et de vérifier son influence sur la charge de ruine, quelques tronçons longs ont eu leurs extrémités de rive connectées l'une à l'autre par un contreventement comme montré à la figure 5.23b. La barre de contreventement consiste en une cornière L 1/2"x1/2"xt posée perpendiculairement à l'axe longitudinal et soudée aux deux extrémités de rive. Les tronçons longs contreventés sont notés en gras au tableau 5.21.

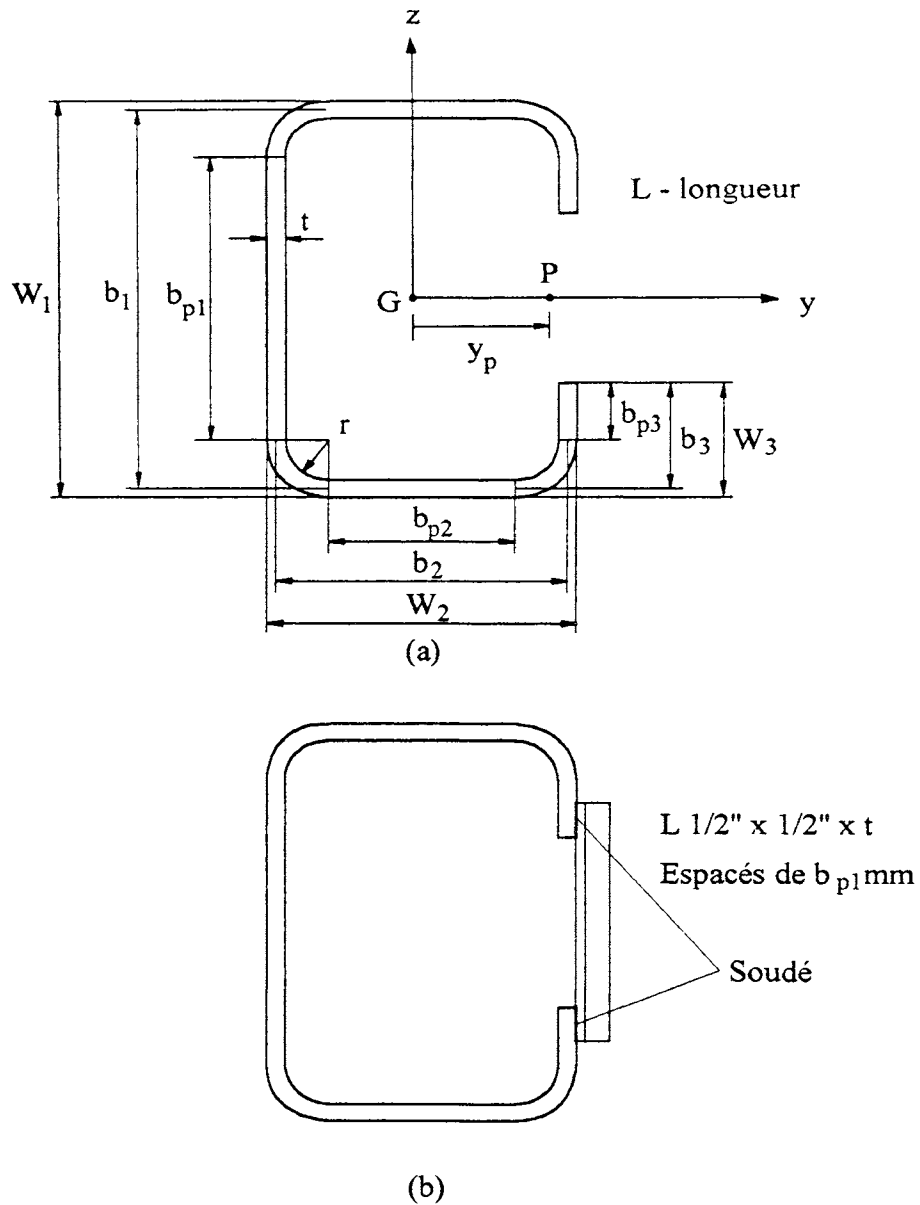


Figure 5.23- Les caractéristiques géométriques du profil C et du contreventement.  
 (a) Caractéristiques géométriques;  
 (b) Contreventement des extrémités de rive des tronçons longs.

Profil $b_{p1}/t \times b_{p2}/t$	Ame $W_1$	Semelle $W_2$	Rive $W_3$	Epaisseur $t$	Rayon $r$	$b_3/b_1$	Longueur $L$	$f_y$ (MPa)
SLC/1-60X30	82,60	41,63	9,86	1,224	2,59	0,11	303,53	226,1
SLC/1-90X30	116,69	41,50	9,88	1,219	2,64	0,08	304,29	226,1
SLC/1-120X30	154,18	42,06	9,65	1,224	3,09	0,06	278,38	226,1
SLC/1-60X60	79,86	81,71	17,22	1,201	1,87	0,21	457,71	230,2
SLC/2-60X60	79,40	81,58	17,27	1,212	1,76	0,21	457,71	230,2
SLC/1-120X60	151,41	81,94	17,30	1,201	1,97	0,11	456,69	230,2
SLC/2-120X60	150,83	82,25	16,92	1,196	1,93	0,11	456,69	230,2
SLC/1-180X60	228,19	81,64	17,50	1,199	1,87	0,07	559,31	230,2
SLC/2-180X60	227,81	81,86	17,55	1,191	2,14	0,07	685,04	230,2
SLC/1-240X60	299,97	81,86	17,30	1,191	1,98	0,06	558,80	230,2
SLC/2-240X60	300,74	82,04	17,63	1,194	2,41	0,06	913,64	238,8
SLC/3-240X60	299,72	81,79	17,32	1,196	1,98	0,06	558,04	230,2
SLC/1-60X90	80,72	114,10	19,13	1,140	2,52	0,23	647,70	223,4
SLC/2-60X90	80,16	114,20	19,20	1,140	2,67	0,24	647,19	223,4
SLC/1-90X90	114,88	114,10	19,23	1,133	2,65	0,16	646,94	224,7
SLC/2-90X90	114,50	114,00	19,25	1,143	2,57	0,16	647,19	224,7
SLC/1-180X90	281,18	145,36	34,21	1,554	2,20	0,12	891,29	412,3
SLC/2-180X90	281,43	146,15	33,40	1,549	2,41	0,12	891,54	412,3
SLC/3-180X90	224,23	113,79	19,35	1,222	2,94	0,08	646,94	368,3
SLC/4-180X90	223,65	115,09	18,95	1,275	2,94	0,08	647,70	198,8
SLC/5-180X90	223,24	114,88	19,51	1,290	3,08	0,08	647,95	198,8
SLC/1-270X90	331,72	114,88	19,05	1,273	2,94	0,06	762,00	198,8
SLC/2-270X90	330,71	115,39	19,05	1,275	2,94	0,06	971,30	203,3
SLC/1-360X90	440,94	113,69	19,18	1,245	2,77	0,04	761,75	201,3
SLC/2-360X90	441,45	113,69	19,10	1,252	2,56	0,04	1295,15	202,2

Tableau 5.20- Les valeurs des caractéristiques géométriques et mécaniques des tronçons courts.

Profil $b_{p1}/t \times b_{p2}/t$	Ame $W_1$	Semelle $W_2$	Rive $W_3$	Epaisseur $t$	Rayon $r$	$b_3/b_1$	Longueur $L$	Excentricité $y_p$	$f_y$ (MPa)
CLC/1.1-120X30	154,79	41,66	9,19	1,224	2,10	0,06	456,18	5,156	226,1
CLC/1-120X60	156,57	81,10	18,11	1,135	2,78	0,11	1524,00	0,000	223,4
CLC/2-120X60	155,98	81,08	17,04	1,143	2,72	0,11	1829,31	0,000	220,3
<b>CLC/2.1-120X60</b>	<b>156,77</b>	<b>80,54</b>	<b>18,03</b>	<b>1,204</b>	<b>3,06</b>	<b>0,11</b>	<b>1828,80</b>	<b>13,614</b>	<b>219,4</b>
CLC/2.2-120X60	156,36	80,82	18,49	1,229	2,99	0,12	1847,09	13,564	219,4
<b>CLC/2.3-120X60</b>	<b>156,16</b>	<b>80,85</b>	<b>18,08</b>	<b>1,209</b>	<b>3,01</b>	<b>0,11</b>	<b>1845,56</b>	<b>-24,943</b>	<b>219,4</b>
<b>CLC/2.4-120X60</b>	<b>155,96</b>	<b>81,05</b>	<b>18,14</b>	<b>1,209</b>	<b>2,96</b>	<b>0,11</b>	<b>1828,80</b>	<b>5,385</b>	<b>223,9</b>
CLC/3-120X60	156,97	81,08	17,04	1,156	2,76	0,11	2999,74	0,000	220,3
CLC/4-120X60	155,37	81,20	17,63	1,153	2,81	0,11	2997,20	0,000	220,3
<b>CLC/5-120X60</b>	<b>156,57</b>	<b>80,49</b>	<b>18,29</b>	<b>1,219</b>	<b>2,95</b>	<b>0,11</b>	<b>1828,80</b>	<b>0,000</b>	<b>223,9</b>
CLC/1-180X60	231,57	81,25	17,27	1,143	2,72	0,07	1752,85	0,000	224,7
CLC/2-180X60	231,98	81,13	17,48	1,138	2,82	0,07	2339,85	0,000	223,4
<b>CLC/2.1-180X60</b>	<b>232,77</b>	<b>80,70</b>	<b>17,96</b>	<b>1,214</b>	<b>2,75</b>	<b>0,07</b>	<b>2338,07</b>	<b>10,770</b>	<b>241,2</b>
CLC/2.2-180X60	231,19	80,95	18,82	1,222	2,74	0,08	2339,09	10,084	236,8
CLC/3-180X60	232,18	81,13	17,37	1,123	2,69	0,07	2921,00	0,000	223,4
<b>CLC/4-180X60</b>	<b>230,58</b>	<b>81,25</b>	<b>18,44</b>	<b>1,229</b>	<b>2,94</b>	<b>0,08</b>	<b>2337,56</b>	<b>0,000</b>	<b>227,9</b>
CLC/1-90X90	114,71	113,79	19,76	1,229	2,99	0,17	2442,46	0,000	236,8
CLC/1-180X90	222,05	114,20	19,94	1,214	2,90	0,09	1830,58	0,000	219,4
CLC/2-180X90	222,83	113,69	19,46	1,212	3,00	0,09	2440,18	0,000	244,2
<b>CLC/2.1-180X90</b>	<b>221,46</b>	<b>113,89</b>	<b>19,46</b>	<b>1,207</b>	<b>2,65</b>	<b>0,09</b>	<b>2439,16</b>	<b>13,233</b>	<b>227,9</b>
CLC/2.2-180X90	222,25	114,10	19,63	1,224	2,94	0,09	2443,23	13,081	236,8
<b>CLC/3-180X90</b>	<b>222,66</b>	<b>114,00</b>	<b>19,13</b>	<b>1,222</b>	<b>2,99</b>	<b>0,08</b>	<b>2442,46</b>	<b>0,000</b>	<b>233,4</b>
Remarques:									
- En gras - extrémités de rive contreventées.									
- CLC/2- Charge centrée.									
- CLC/2.1- Charge excentrée.									

Tableau 5.21- Les valeurs des caractéristiques géométriques et mécaniques des tronçons longs.

### 5.4.2. Tronçon court

Le tableau 5.22 montre les charges de ruine expérimentales, les charges de ruine numériques selon l'Eurocode 3, l'AISI-90, l'AISI-90\* et la proposition A, et les rapports charge de ruine expérimentale-numérique pour les tronçons courts. On rappelle que la charge de ruine calculée pour les tronçons courts est égale à l'aire effective, pour une compression uniforme égale à  $f_y$ , fois la limite élastique  $f_y$ . C'est pourquoi les résultats de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 sont identiques. La ruine des plaques appuyées aux deux bords et sur un seul bord est définie par la même formule de Winter dans ces deux approches. Les calculs statistiques montrent aussi qu'elles sont non-conservatives. L'approche de l'AISI-90\*, qui tient compte de l'efficacité de l'extrémité de rive ou raidisseur de la semelle, se place du côté conservatif. Quant à la proposition A, elle se place aussi du côté conservatif avec la meilleure corrélation numérique-expérimentale et le plus petit coefficient de variation. On voit donc que la prise en compte de l'interaction en voilement entre les plaques (proposition A) apparaît comme une approche tout à fait simple et naturelle sans qu'il faille faire appel aux calculs compliqués proposés dans les spécifications de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 pour tenir compte de l'efficacité du raidisseur.

Quant au chemin d'équilibre, les figures 5.24 à 5.27 illustrent les courbes du type charge x raccourcissement expérimentales et numériques de 4 tronçons courts essayés par MULLIGAN. Les mêmes courbes pour les autres tronçons courts se trouvent en annexe. Contrairement à ce qu'on a trouvé pour les tronçons courts de BATISTA, on note que le chemin d'équilibre numérique est en bon accord avec le chemin d'équilibre expérimental au stade pré-voilé. Comme déjà dit au paragraphe 5.3.2, ceci est dû au fait que MULLIGAN a mesuré le raccourcissement à l'aide des jauges électriques placés aux coins du profil.

Profil bp1/t x bp2/t	Pexp (KN)	Pr				Pexp/Pr			
		Eurocode	AISI-90	AISI-90*	Prop. A	Eurocode	AISI-90	AISI-90*	Prop. A
SLC/1-60X30	46,3	44,1	44,1	43,3	43,3	1,05	1,05	1,07	1,07
SLC/1-90X30	44,7	45,9	45,9	42,6	42,9	0,97	0,97	1,05	1,04
SLC/1-120X30	45,1	46,5	46,5	44,9	43,2	0,97	0,97	1,01	1,05
SLC/1-60X60	58,7	58,9	58,9	51,0	57,2	1,00	1,00	1,15	1,03
SLC/2-60X60	60,5	59,8	59,8	51,2	57,9	1,01	1,01	1,18	1,04
SLC/1-120X60	57,8	60,7	60,7	52,7	55,9	0,95	0,95	1,10	1,03
SLC/2-120X60	60,5	60,6	60,6	50,7	55,3	1,00	1,00	1,19	1,09
SLC/1-180X60	56,9	61,2	61,2	54,4	52,8	0,93	0,93	1,05	1,08
SLC/2-180X60	56,9	60,2	60,2	53,7	52,5	0,95	0,95	1,06	1,08
SLC/1-240X60	56,9	60,2	60,2	53,3	50,9	0,95	0,95	1,07	1,12
SLC/2-240X60	53,4	63,0	63,0	55,1	52,9	0,85	0,85	0,97	1,01
SLC/3-240X60	56,0	61,2	61,2	53,4	51,0	0,92	0,92	1,05	1,10
SLC/1-60X90	51,2	55,4	55,4	48,8	--	0,92	0,92	1,05	--
SLC/2-60X90	52,5	55,7	55,7	48,7	--	0,94	0,94	1,08	--
SLC/1-90X90	52,9	56,5	56,5	50,2	54,7	0,94	0,94	1,06	0,97
SLC/2-90X90	53,4	58,0	58,0	50,9	55,5	0,92	0,92	1,05	0,96
SLC/1-180X90	138,6	153,2	153,2	153,3	138,6	0,90	0,90	0,90	1,00
SLC/2-180X90	139,7	153,3	153,3	154,1	137,8	0,91	0,91	0,91	1,01
SLC/3-180X90	67,6	90,0	90,0	69,9	80,6	0,75	0,75	0,97	0,84
SLC/4-180X90	61,4	66,5	66,5	52,9	59,9	0,92	0,92	1,16	1,02
SLC/5-180X90	64,9	67,9	67,9	55,1	61,1	0,96	0,96	1,18	1,06
SLC/1-270X90	60,5	65,8	65,8	53,8	56,9	0,92	0,92	1,12	1,06
SLC/2-270X90	62,3	66,9	66,9	54,5	57,9	0,93	0,93	1,14	1,08
SLC/1-360X90	55,6	64,4	64,4	53,4	53,4	0,86	0,86	1,04	1,04
SLC/2-360X90	49,8	64,2	64,2	54,4	53,7	0,78	0,78	0,92	0,93
Remarques:				Moyenne		= 0,93	= 0,93	= 1,06	= 1,03
				Ecart type		= 0,07	= 0,07	= 0,08	= 0,06
				Coef. de Var. (%)		= 7,08	= 7,08	= 7,87	= 6,05
- (*) - Extrémité de rive pénalisée.									
- Nœuds intermédiaires (non-appuyés) sont empêchés de tourner autour de y et z, et de gauchir pour éviter de l'instabilité numérique.									
- (--) - Hors de la limite d'applicabilité de l'équation (2.79).									
- Ruine limitée par début de plastification.									

Tableau 5.22- Résultats des tronçons courts.

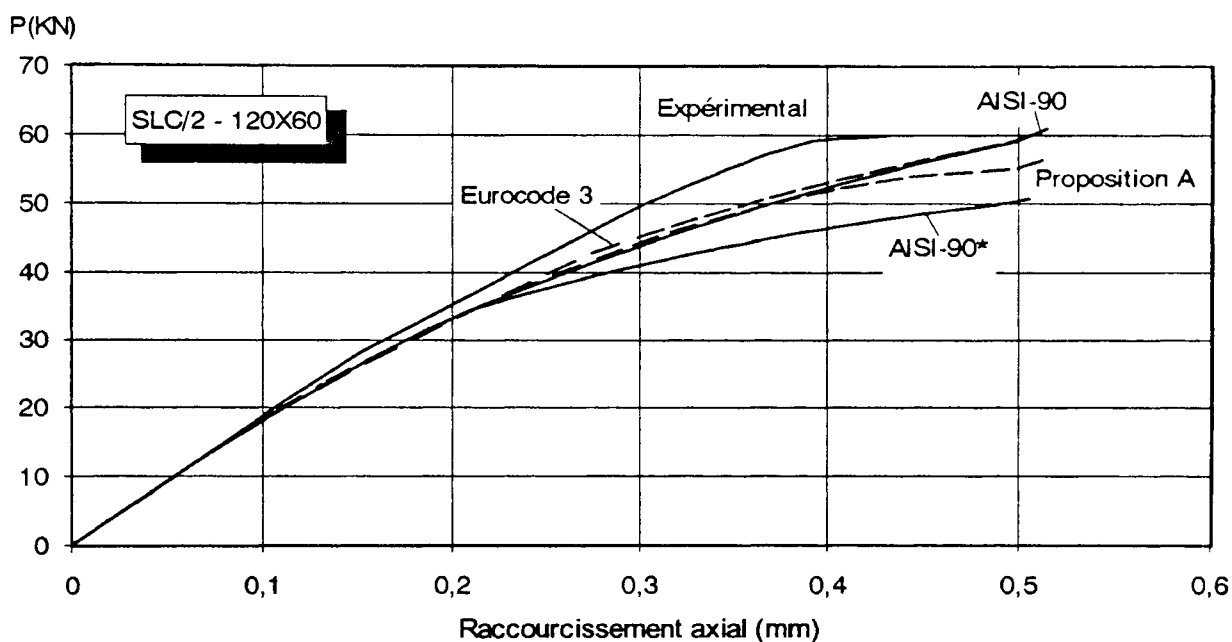


Figure 5.24- Courbes de charge x raccourcissement.

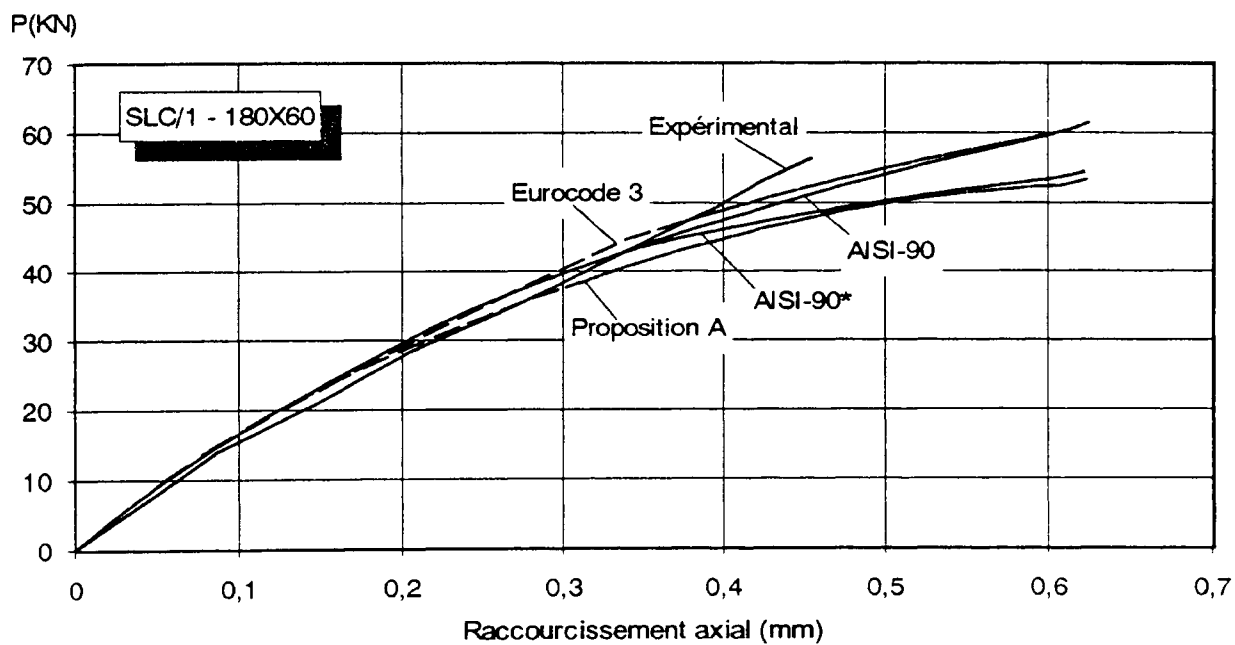


Figure 5.25- Courbes de charge x raccourcissement.



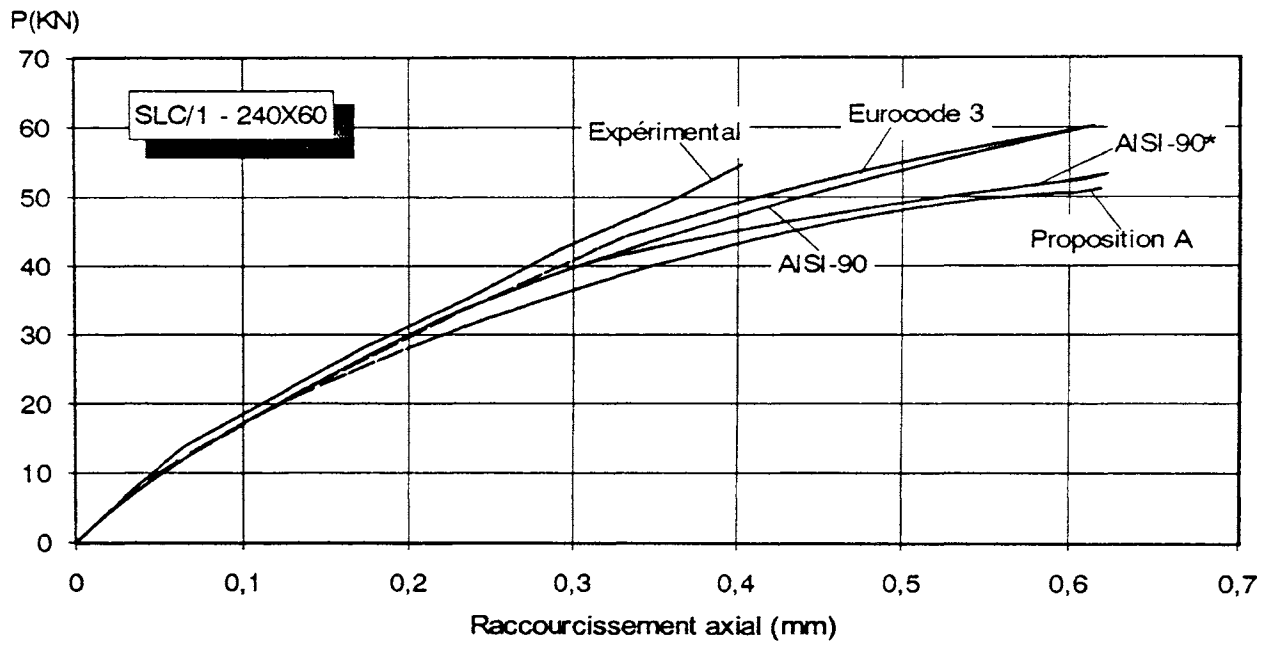


Figure 5.26- Courbes de charge x raccourcissement.

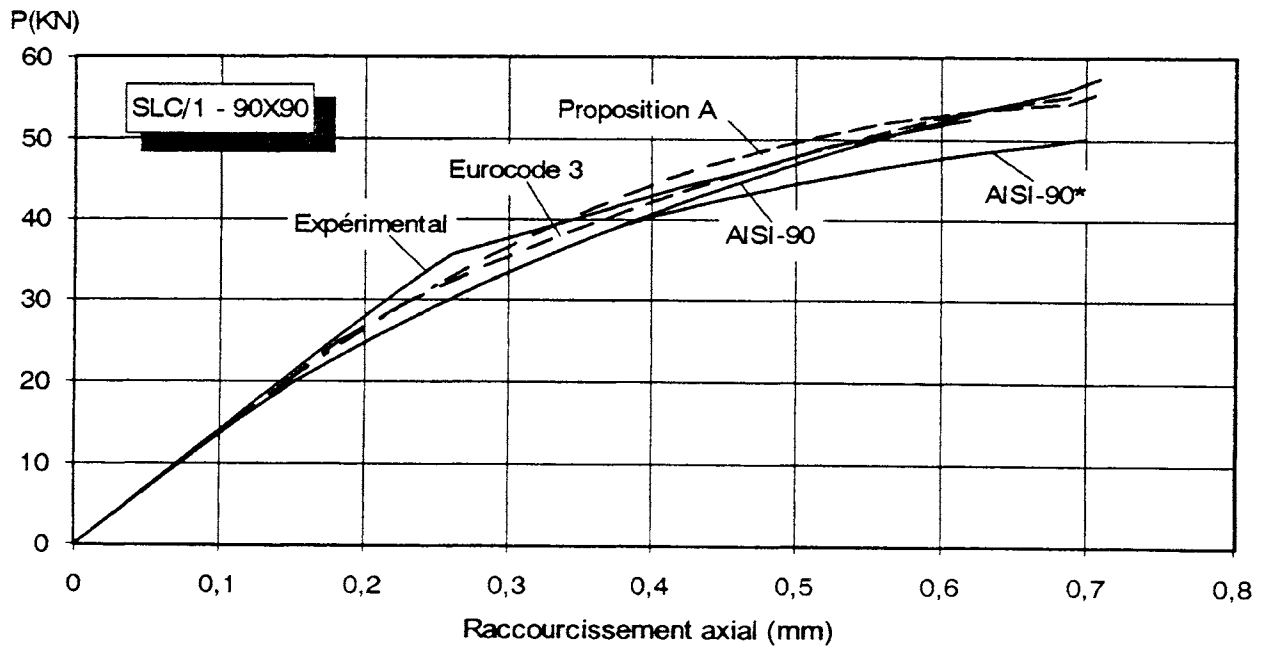


Figure 5.27- Courbes de charge x raccourcissement.

### 5.4.3. Tronçon long

Les tableaux 5.23 et 5.24 donnent les flèches maximales mesurées, les charges de ruine expérimentales et numériques selon les approches de l'Eurocode 3, de l'AISI-90, de l'AISI-90\* (tableau 5.23), et de la proposition A (tableau 5.24). Les seuls profils présentés sur ces tableaux sont ceux pour lesquels la flèche maximale était donnée dans la référence [33]. Comme il n'y avait que la flèche maximale qui était donnée en [33], on a adopté pour le calcul numérique une déformée initiale de type sinusoïdal avec la flèche maximale mesurée. La figure 5.1d montre la convention de signe et de direction de la flèche.

Les approches de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 ne tiennent pas compte de l'efficacité du raidisseur de la semelle. C'est pourquoi les profils avec charge excentrée dont le point d'application se situe entre le centre de gravité et l'extrémité de rive (semelle plus comprimée du côté du raidisseur) et dont l'extrémité de rive n'est pas contreventée sont négligés dans les calculs statistiques de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 du tableau 5.23. Par contre, dans les calculs statistiques de l'AISI-90\*, on néglige les profils qui ont leurs extrémités de rive contreventées et dont, en même temps, la charge de ruine est plus petite que celle obtenue par l'AISI-90. Les calculs statistiques du tableau 5.23 montrent que ces approches sont moyennement conservatives dans les cas où elles s'appliquent. L'AISI-90\* présente un coefficient de variation plus important.

Quant au tableau 5.24, aucune distinction n'a été faite quant à la présence du contreventement des extrémités de rive parce que la proposition A a été en général fort conservative pour la plupart des profils. Ceci est dû au fait que les coefficients de voilement de cette proposition sont calculés pour la section transversale soumise à une compression uniforme et restent inchangés pendant le chargement de la colonne. Ainsi, ils ne tiennent pas compte du gradient de contraintes dû à l'excentricité de la charge ou dû aux non-linéarités géométriques. Il s'avère nécessaire d'utiliser des coefficients de voilement qui tiennent compte de l'interaction en voilement entre les plaques avec un gradient de contraintes quelconque sur la section et qui serait aussi actualisés à chaque itération du pas non-linéaire pour tenir compte du changement du gradient de contraintes. Cette nouvelle proposition est hors du cadre de cette thèse et fera opportunément l'objet d'une recherche subséquente de l'auteur.

Le conservatisme exagéré que la proposition A a donné pour les profils C semble montrer que l'effet de l'interaction en voilement entre les plaques du profil est variable en cours de chargement. Pour cela on veut dire que la grandeur de la restrainte en rotation qu'une plaque exerce sur l'autre est variable en cours de chargement avec le changement du gradient de contraintes sur la section transversale.

Profil $b_{p1}/t \times b_{p2}/t$	Flèche Maximum		$P_{exp}$ (KN)	$P_r$			$P_{exp}/P_r$		
	Déformée Sinusoidale			Eurocode	AISI-90	AISI-90*	Eurocode	AISI-90	AISI-90*
	$(f_{oy}/L)$ ‰	$(f_{oz}/L)$ ‰							
CLC/2.1-120X60	0,583	0,278	45,8	44,7	43,7	33,6	1,02	1,05	\$ 1,36
CLC/2.2-120X60	0,165	0,234	38,9	45,3	44,8	35,7	# 0,86	# 0,87	1,09
CLC/2.3-120X60	0,523	0,317	30,0	27,0	26,9	26,9	1,11	1,12	1,12
CLC/2.4-120X60	0,625	0,292	55,2	52,1	51,0	48,0	1,06	1,08	\$ 1,15
CLC/4-120X60	0,534	0,093	37,4	33,9	33,8	33,7	1,10	1,11	1,11
CLC/5-120X60	0,625	0,083	52,5	45,5	45,5	45,5	1,15	1,15	1,15
CLC/2-180X60	0,413	0,174	38,9	34,5	34,1	34,1	1,13	1,14	1,14
CLC/2.1-180X60	0,739	0,228	46,3	54,4	51,6	42,9	0,85	0,90	\$ 1,08
CLC/2.2-180X60	0,369	0,076	44,5	55,2	53,1	53,5	# 0,81	# 0,84	0,83
CLC/4-180X60	0,815	0,250	48,0	39,7	39,5	39,5	1,21	1,22	1,22
CLC/2.1-180X90	0,740	0,302	55,6	60,6	56,3	42,7	0,92	0,99	\$ 1,30
CLC/2.2-180X90	0,146	0,177	38,9	66,6	61,3	41,6	# 0,58	# 0,63	0,94
Remarques:				Moyenne			=1,06	=1,08	=1,07
- En gras - extrémités de rive contreventées.				Ecart type			=0,12	=0,10	=0,13
- CLC/2- Charge centrée.				Coef. de Variation (%)			=10,85	=8,82	=11,81
- CLC/2.1- Charge excentrée.									
- (*) - Extrémité de rive pénalisée									
- Tous - flambement par flexion.									
- Ruine limitée par début de plastification ou en régime élastique.									
- Discrétisation avec 4 éléments finis.									
- (#) - Négligés des statistiques									
(cas de charge excentrée avec contreventement inexistant).									
- (\$) - Négligés des statistiques (contreventement existant).									

Tableau 5.23- Résultats des tronçons longs.

Profil $b_{p1}/t \times b_{p2}/t$	Flèche Maximum		$P_{exp}$ (KN)	Proposition A	
	Déformée Sinusoïdale			$P_r$	$P_{exp}/P_r$
	$(f_{oy}/L) \text{ ‰}$	$(f_{oz}/L) \text{ ‰}$			
CLC/2.1-120X60	0,583	0,278	45,8	28,9	1,59
CLC/2.2-120X60	0,165	0,234	38,9	29,6	1,31
CLC/2.3-120X60	0,523	0,317	30,0	24,7	1,22
CLC/2.4-120X60	0,625	0,292	55,2	40,8	1,35
CLC/4-120X60	0,534	0,093	37,4	29,3	1,28
CLC/5-120X60	0,625	0,083	52,5	37,0	1,42
CLC/2-180X60	0,413	0,174	38,9	25,4	1,53
CLC/2.1-180X60	0,739	0,228	46,3	30,4	1,52
CLC/2.2-180X60	0,369	0,076	44,5	30,6	1,45
CLC/4-180X60	0,815	0,250	48,0	29,1	1,65
CLC/2.1-180X90	0,740	0,302	55,6	36,2	1,54
CLC/2.2-180X90	0,146	0,177	38,9	36,8	1,06
		Moyenne	= 1,41		
		Ecart type	= 0,17		
Remarques:		Coefficient de Variation (%)	=12,23		
<b>- En gras - extrémités de rive contreventées.</b>					
- CLC/2- Charge centrée.					
- CLC/2.1- Charge excentrée.					
- Tous - flambement par flexion.					
- Ruine limitée par début de plastification ou en régime élastique.					
- Discrétisation avec 4 éléments finis.					

Tableau 5.24- Résultats des tronçons longs.

Les figures 5.28 à 5.37 montrent les courbes de charge x déplacement du noeud 3 en Y (voir figure 5.1b) expérimentales et numériques selon les approches de l'Eurocode 3, de l'AISI-90 ou de l'AISI-90\*, et de la proposition A avec les flèches initiales données aux tableaux 5.23 ou 5.24. Pour les profils dont les extrémités de rive ne sont pas contreventées on donne la courbe de l'AISI-90\*, tandis que pour celles qui sont contreventées on donne la courbe de l'AISI-90, sauf pour le profil CLC/2.1-180x90 (figure 5.36) où on donne les deux courbes. L'examen de ces figures permet de faire les remarques suivantes:

- a) Dans la plupart des figures, la courbe de la proposition A démarre de l'origine en meilleur accord avec la courbe expérimentale que les autres courbes numériques. En suite, à partir d'un certain niveau de charge la courbe de la proposition A s'écarte de la courbe expérimentale conservativement. En effet, comme la proposition A ne tient pas compte du gradient de contraintes pour ses coefficients de voilement, elle ne sait pas suivre la courbe expérimentale jusqu'à la ruine;
- b) Les approches de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 sont en général conservatives dans les cas où l'excentricité de la charge n'est pas positive (raidisseur plus comprimé que l'âme);
- c) Dans le cas spécial de la figure 5.36, profil CLC/2.1-180x90 avec les extrémités de rive contreventées, les courbes de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 ne suivent pas la courbe expérimentale. Il semble que le contreventement n'aurait pas été suffisant. C'est pourquoi on a ajouté la courbe de l'AISI-90\* à cette figure. Cette dernière suit la courbe expérimentale;
- d) Les figures 5.36 et 5.37 montrent que les courbes de la proposition A suivent naturellement les courbes expérimentales sans qu'il faille faire aucun traitement spécial des largeurs effectives de la semelle et du raidisseur (AISI-90\*) afin de tenir compte de son efficacité. Donc, il semble que l'utilisation des coefficients de voilement qui tiennent compte de l'interaction en voilement entre les plaques du profil soit la seule solution générale et simple pouvant être appliquée non seulement au profil C, mais aussi à n'importe quel type de profil qu'on puisse trouver en pratique.

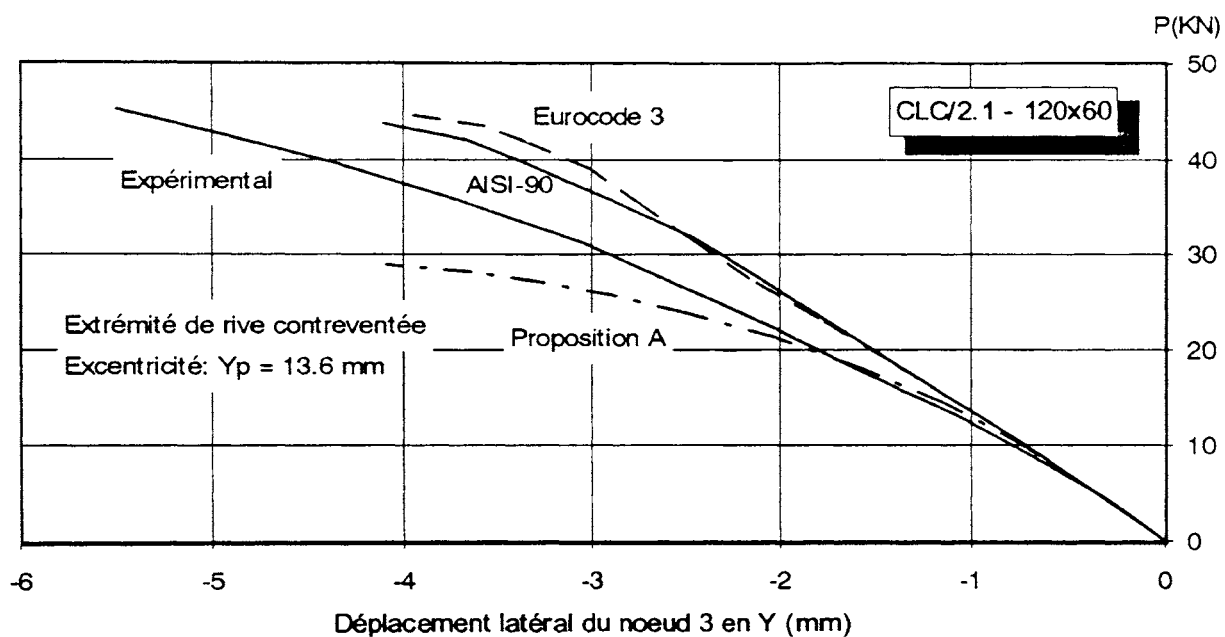


Figure 5.28- Courbes de charge x déplacement.

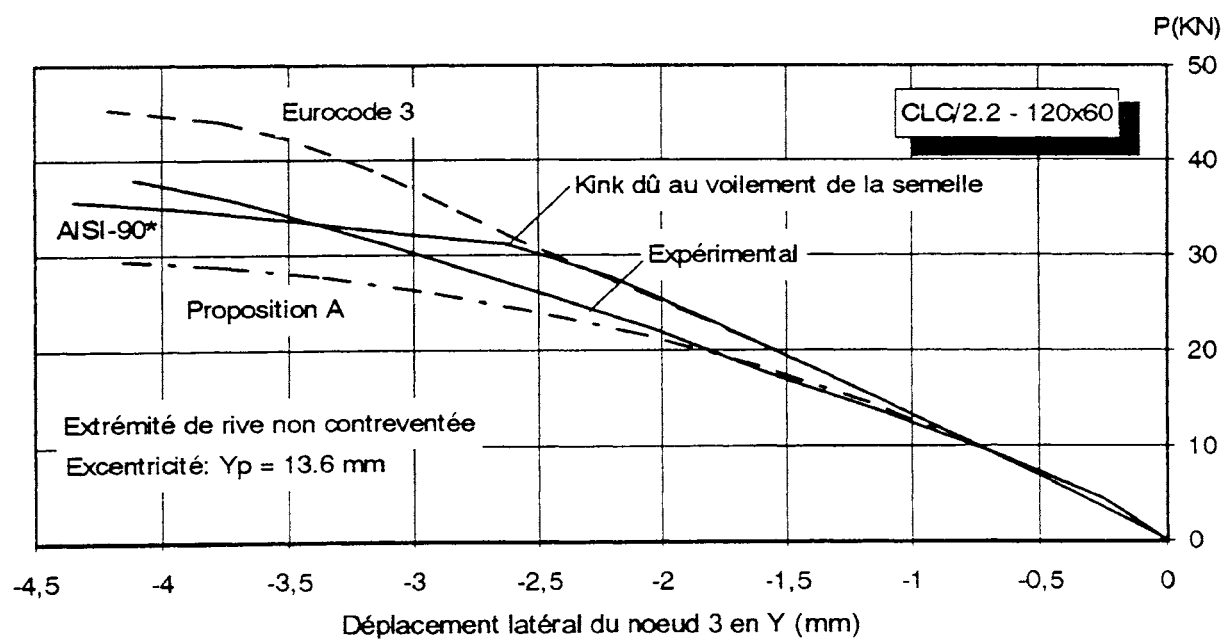


Figure 5.29- Courbes de charge x déplacement.

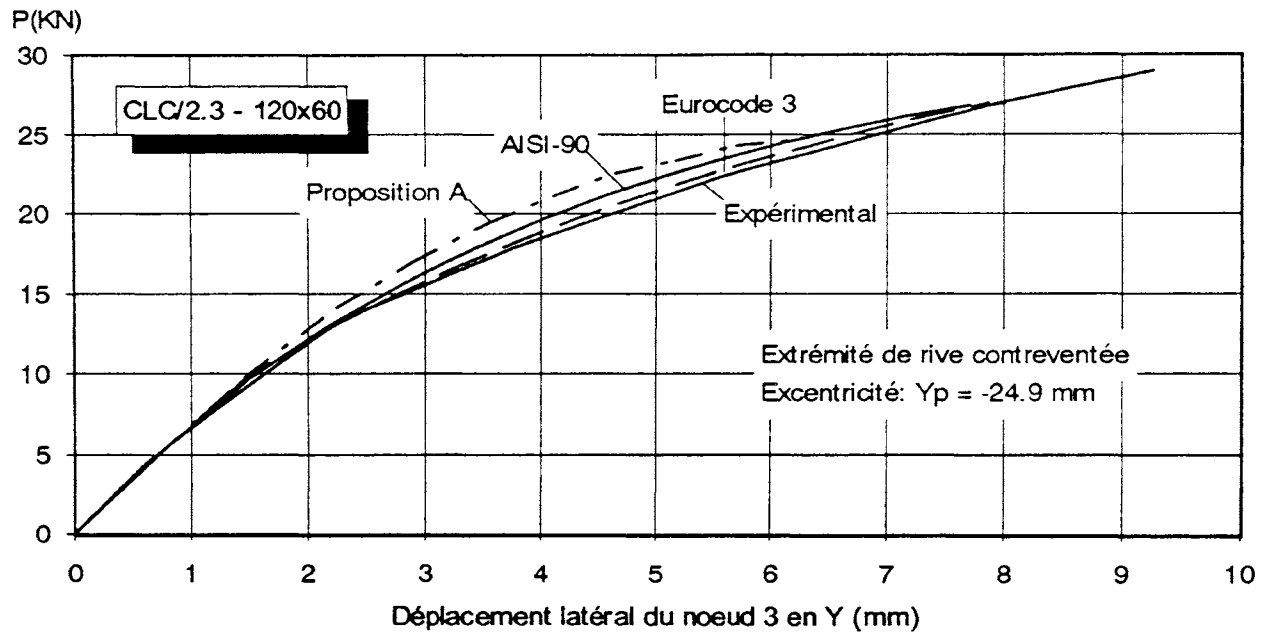


Figure 5.30- Courbes de charge x déplacement.

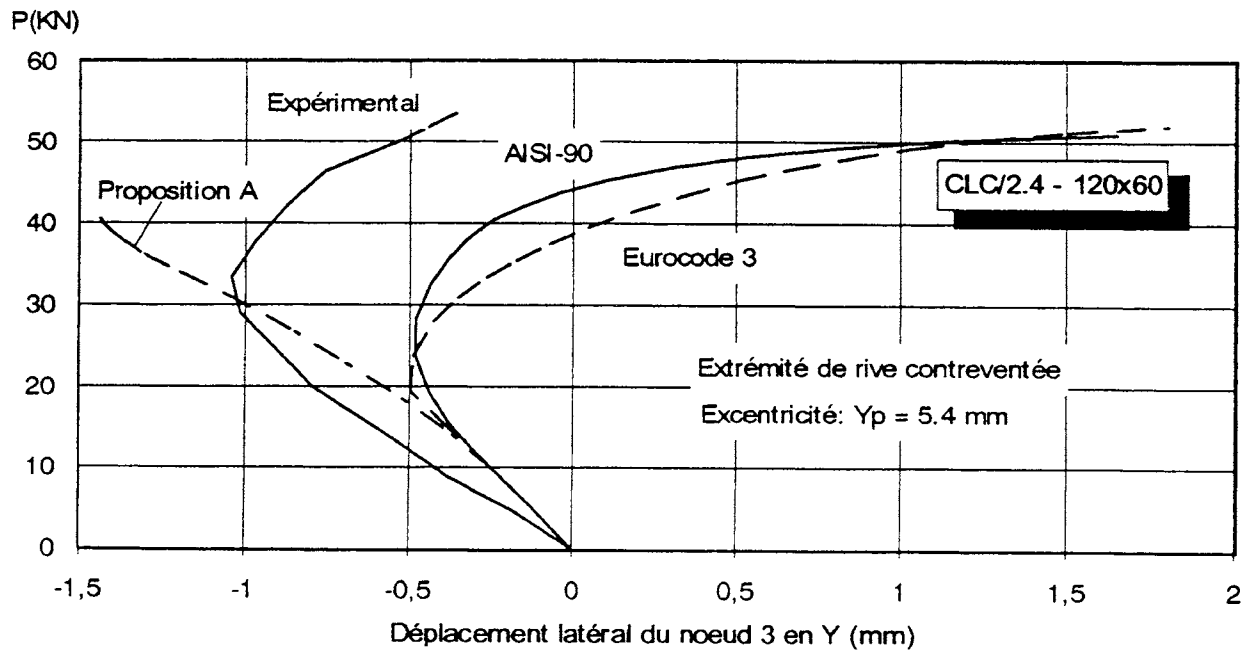


Figure 5.31- Courbes de charge x déplacement.

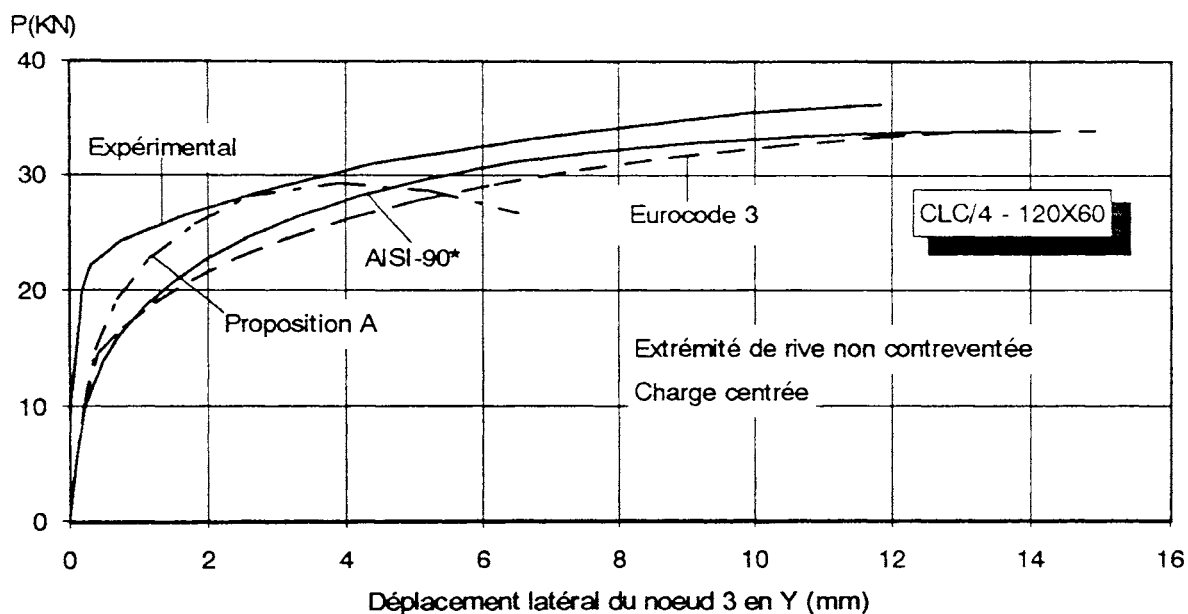


Figure 5.32- Courbes de charge x déplacement.

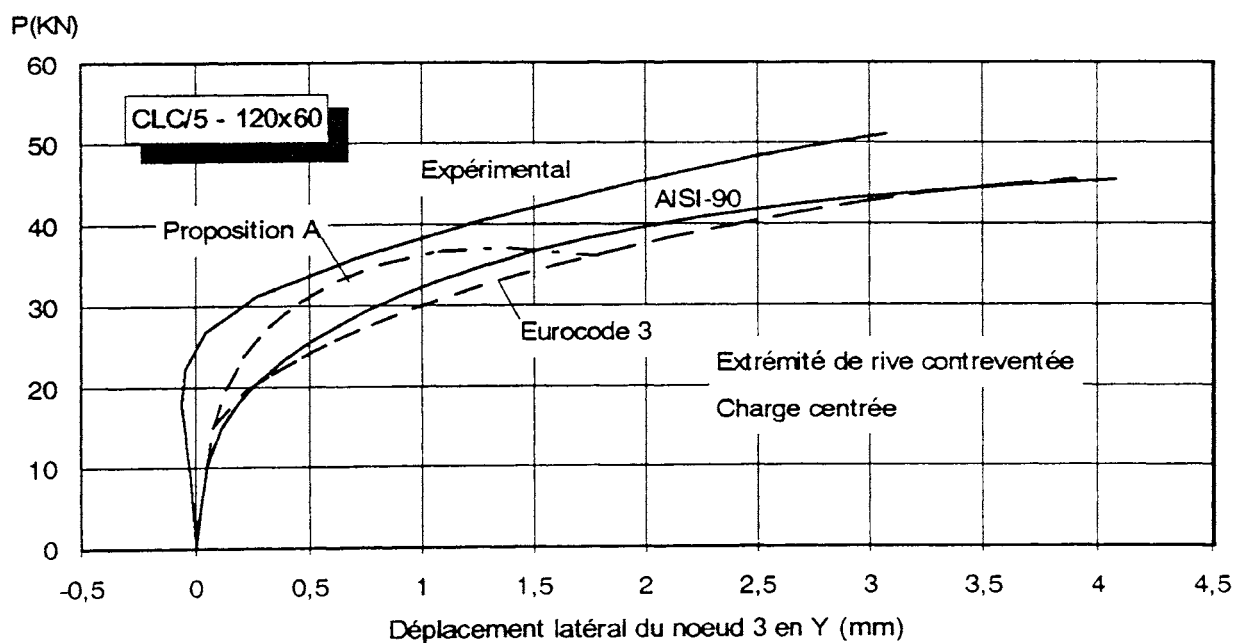


Figure 5.33- Courbes de charge x déplacement.



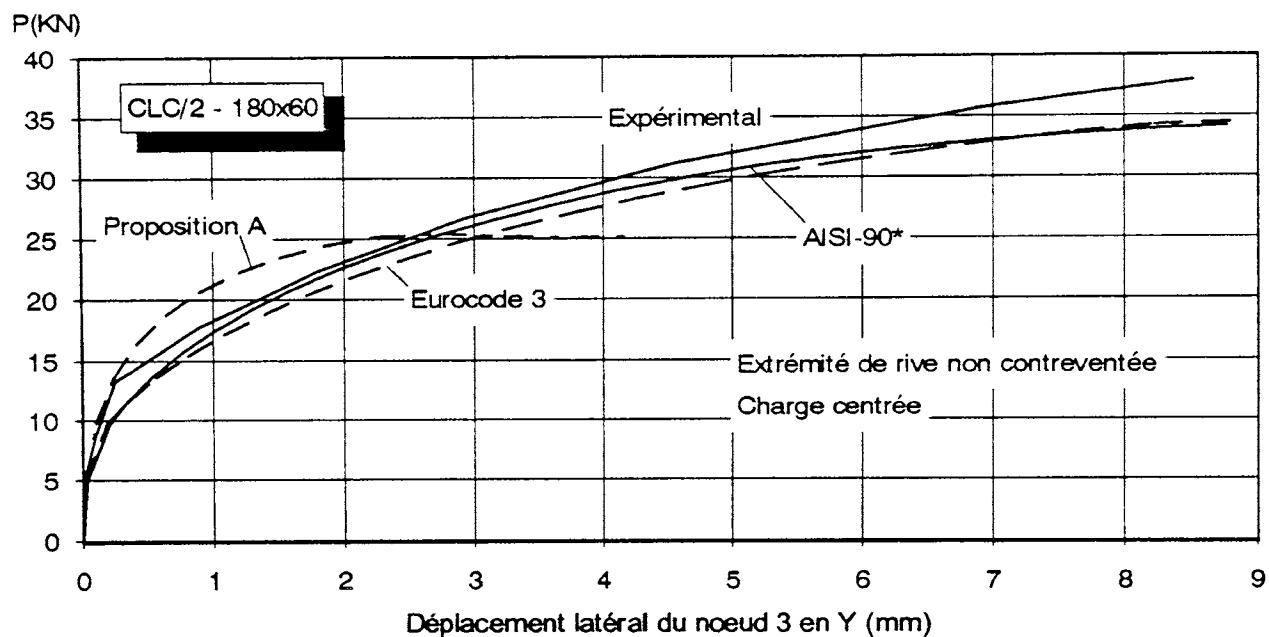


Figure 5.34- Courbes de charge x déplacement.

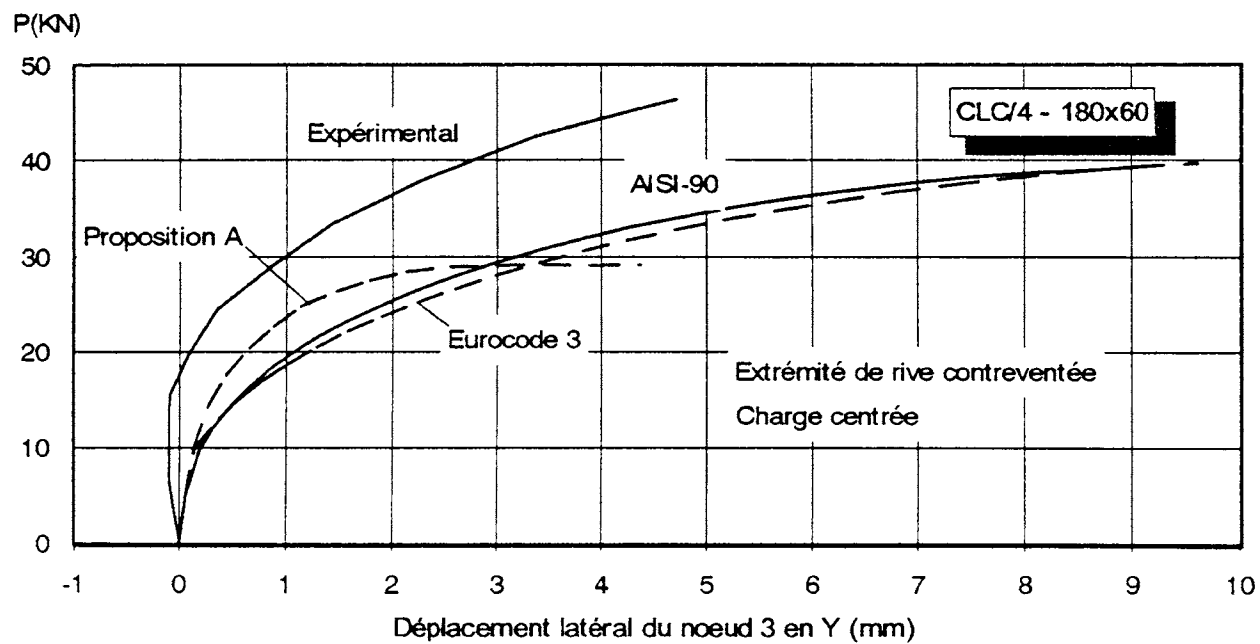


Figure 5.35- Courbes de charge x déplacement.

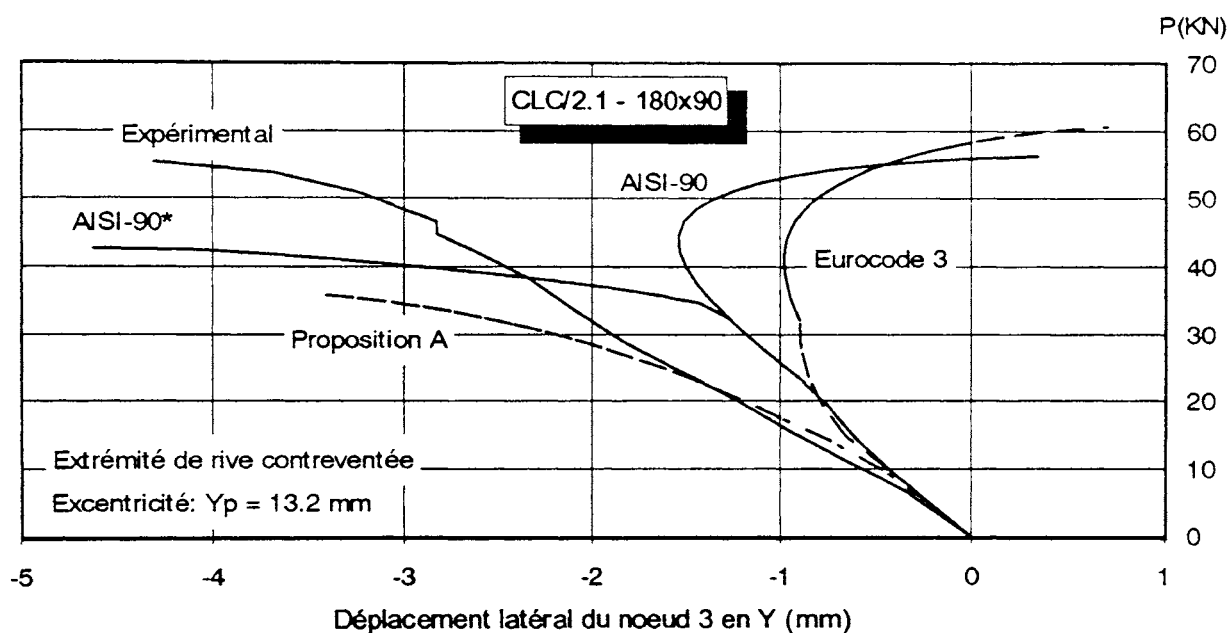


Figure 5.36- Courbes de charge x déplacement.

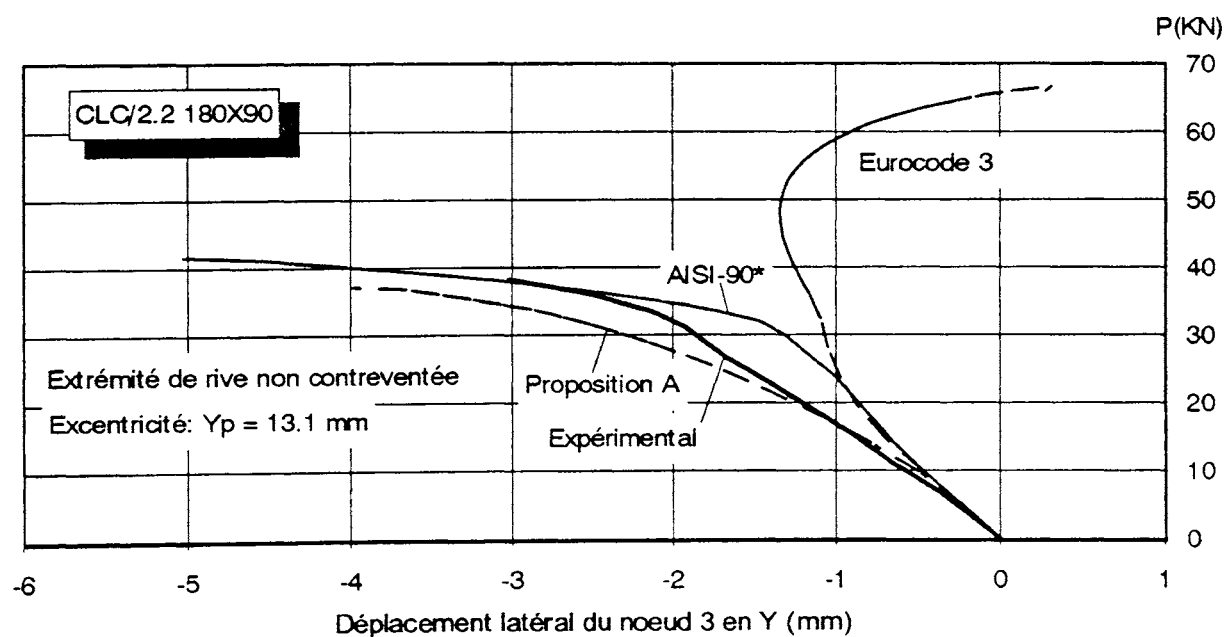


Figure 5.37- Courbes de charge x déplacement.

Finalement le tableau 5.25 donne les valeurs des charge critique de flexion et de flexion-torsion (avec gauchissement libre et empêché aux extrémités), les charges de ruine expérimentales et numériques selon l'Eurocode 3, l'AISI-90 et l'AISI-90\*, ainsi que les rapports charge de ruine expérimentale-numérique pour tous les profils essayés par MULLIGAN. Cette fois, la flèche initiale maximale de la déformée sinusoïdale est de  $L/1000$  dans le sens défavorable. Le sens défavorable selon l'axe  $y$  peut être soit le sens positif, soit le sens négatif, voir figure 5.1d. Sur ce tableau le signe plus (+) ou moins (-) à côté de la charge de ruine indique le sens défavorable. Quant aux calculs statistiques, on a pris les mêmes précautions que celles du tableau 5.23, eu égard à l'existence du contreventement. A propos de ce tableau on peut faire les remarques suivantes:

- a) Si on considère que le gauchissement est empêché aux extrémités, le mode critique d'instabilité de tous les profils est de flexion, sauf le profil CLC/1-90x90 (section carrée) dont le mode critique est de flexion-torsion. A l'exception du profil CLC/1-90x90, si on avait considéré que le gauchissement était libre aux extrémités pour les autres profils lors du calcul numérique, les charges de ruine ainsi obtenues ne serait pas beaucoup plus petites (environ 10%) que les charges de ruine numériques données dans ce tableau. Ceci s'explique par le fait que, malgré le mode critique de flexion-torsion (avec une valeur critique plus petite que celle par flexion), le déplacement du centre de gravité de la section effective causé surtout par le voilement de l'âme (qui sont déjà très minces pour ces profils) favorise l'instabilité par flexion. On dirait que la ruine est plutôt dictée par un couplage entre le mode de flexion et le voilement local pour tous les profils de MULLIGAN, sauf pour le profil CLC/1-90x90;
- b) On note que pour les profils CLC/2.4-120x60, CLC/2.1-180x60, CLC/2.2-180x60 et CLC/1-90x90 le sens défavorable n'est pas le même pour les trois approches de calcul de la largeur effective. L'explication de ce fait est reportée au paragraphe suivant, lors de l'étude de l'influence de la déformée initiale sur la charge de ruine;
- c) Les résultats des calculs statistiques montrent que les trois approches se placent du côté conservatif dans les cas où chacune peut être appliquée.

La figure 5.38 illustre les déformées à la ruine des profils CLC/1-120x60, mode de ruine de flexion, et CLC/1-90x90, mode de ruine de flexion-torsion, du tableau 5.25, calculées selon l'Eurocode 3.

Profil b <sub>p1</sub> /t x b <sub>p2</sub> /t	P <sub>f</sub>	P <sub>ft</sub> k <sub>33</sub> =1	P <sub>ft</sub> k <sub>33</sub> =4	P <sub>exp</sub> (KN)	P <sub>r</sub>			P <sub>exp</sub> /P <sub>r</sub>		
					Eurocode	AISI-90	AISI-90*	Eurocode	AISI-90	AISI-90*
CLC/1.1-120X30	586	512	1979	35,6	39,2-	37,8-	29,4-	# 0,91	# 0,94	1,21
CLC/1-120X60	317	166	547	43,6	39,8+	39,0+	38,9+	1,11	1,12	1,12
CLC/2-120X60	217	113	373	46,3	37,9+	37,4+	37,4+	1,22	1,24	1,24
CLC/2.1-120X60	228	95	322	45,8	40,6-	39,2-	31,4-	1,13	1,17	\$ 1,46
CLC/2.2-120X60	232	96	325	38,9	41,8-	41,9-	34,0-	# 0,93	# 0,93	1,15
CLC/2.3-120X60	227	227	656	30,0	26,9+	26,7+	26,7+	1,12	1,12	1,12
CLC/2.4-120X60	233	110	366	55,2	48,7+	47,8+	42,4-	1,13	1,15	\$ 1,30
CLC/3-120X60	82	44	143	36,5	32,1+	31,6+	31,6+	1,14	1,15	1,15
CLC/4-120X60	83	44	141	37,4	32,1+	31,4+	31,4+	1,16	1,19	1,19
CLC/5-120X60	232	124	405	52,5	43,8+	42,6+	42,6+	1,20	1,23	1,23
CLC/1-180X60	271	224	821	42,7	36,2+	35,5+	35,5+	1,18	1,20	1,20
CLC/2-180X60	151	126	461	38,9	33,5+	32,7+	32,7+	1,16	1,19	1,19
CLC/2.1-180X60	161	111	409	46,3	51,3+	48,3-	37,2-	0,90	0,84	\$ 1,24
CLC/2.2-180X60	165	115	420	44,5	50,4+	48,2+	44,7-	# 0,80	# 0,80	0,99
CLC/3-180X60	96	80	292	33,8	28,9+	28,7+	28,7+	1,17	1,18	1,18
CLC/4-180X60	166	138	502	48,0	38,8+	38,5+	38,5+	1,24	1,25	1,25
CLC/1-90X90	278	53	157	48,9	46,8+	47,4+	44,3-	1,03	1,03	1,10
CLC/1-180X90	622	323	1089	54,7	46,8+	44,7+	44,7+	1,17	1,22	1,22
CLC/2-180X90	343	181	610	53,8	46,7+	44,8+	44,7+	1,15	1,20	1,20
CLC/2.1-180X90	344	149	513	55,6	55,6-	51,8-	38,9-	1,00	1,07	\$ 1,43
CLC/2.2-180X90	350	152	524	38,9	60,1-	55,1-	39,2-	# 0,65	# 0,71	0,99
CLC/3-180X90	346	181	612	52,5	46,4+	44,2+	44,2+	1,13	1,19	1,19
Remarques:					Moyenne			= 1,13	= 1,15	= 1,16
- En gras - extrémités de rive contreventées.					Ecart type			= 0,08	= 0,10	= 0,07
- (*) - Extrémité de rive pénalisée.					Coef. de Variation (%)			= 7,14	= 8,32	= 6,36
- CLC/2- Charge centrée.										
- CLC/2.1- Charge excentrée.										
- CLC/1-90x90 - flambement par flexion torsion, les autres - flambement par flexion.										
- Ruine limitée par début de plastification ou en régime élastique.										
- Déformée initiale égale à L/1000 dans le sens défavorable en y et z.										
- (xx,x+) - Déformée initiale défavorable est dans le sens positif de y.										
- (xx,x-) - Déformée initiale défavorable est dans le sens négatif de y.										
- (#) - Négligés des statistiques										
(cas de charge excentrée avec contreventement inexistant).										
- (\$) - Négligés des statistiques (contreventement existant).										

Tableau 5.25- Résultats des tronçons longs.

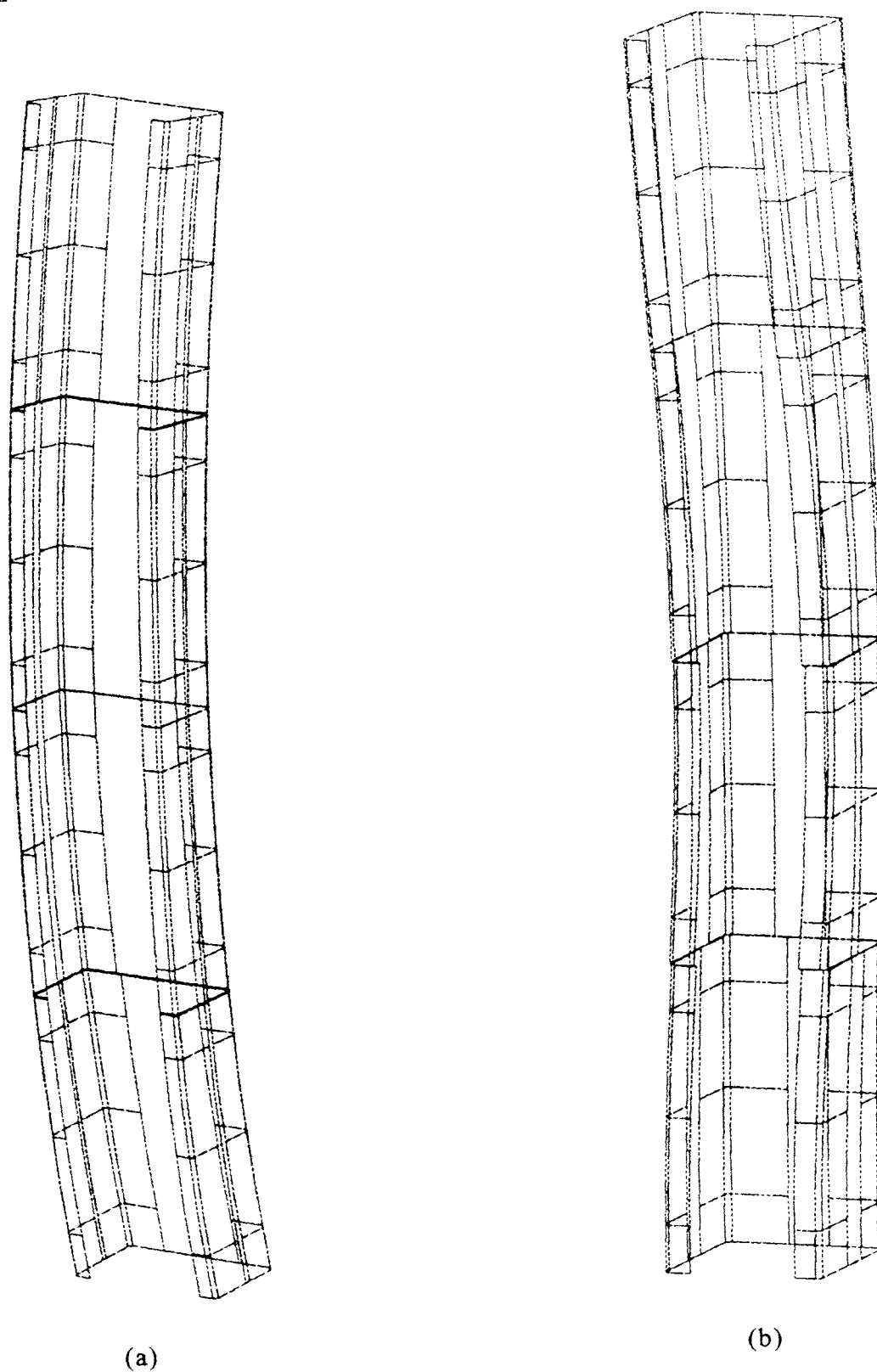


Figure 5.38- Visualisation de la déformée à la ruine selon l'Eurocode 3, flèche initiale égale à  $+L/1000$ .

(a) Profil CLC/1-120x60, déformée amplifiée 30 fois;

(b) Profil CLC/1-90x90, déformée amplifiée 5 fois.

#### 5.4.4. Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine

Le but de ce paragraphe est d'étudier l'influence de la déformée initiale sur la charge de ruine. Le sens défavorable de la flèche initiale est en général en rapport avec la position relative du point d'application de la charge par rapport au centre de gravité de la section effective, pour une compression uniforme égale à  $f_y$ . Par exemple, on va expliquer pourquoi le sens défavorable de la flèche initiale du profil CLC/2.2-180x60 est différent selon l'approche utilisée pour le calcul de la largeur effective, voir tableau 5.25. Les figures 5.39, 5.40 et 5.41 montrent les courbes de déplacement du centre de gravité de la section effective de l'élément fini 2 selon l'axe y avec la charge pour les flèches de  $-L/1000$ ,  $+L/1000$  et nulle; la position du point de connexion et la position du centre de gravité de la section effective à  $f_y$  selon les approches de l'Eurocode 3, de l'AISI-90 et de l'AISI-90\*, respectivement. Ces figures montrent que la position du centre de gravité de la section effective à  $f_y$  est la même pour l'Eurocode 3 et pour l'AISI-90 (les largeurs effectives à  $f_y$  sont données par la même formule de Winter) et se situe à droite du point de connexion, tandis que pour l'AISI-90\* ce point se situe légèrement à gauche du point de connexion. On note que, *en général*, le sens défavorable de la flèche est celui qui pointe du point de connexion vers le centre de gravité de la section effective à  $f_y$ . On a dit 'en général' parce que ce n'est pas toujours le cas, comme nous le montre l'exemple du profil CLC/2.1-180x60 au tableau 5.25. Pour ce dernier les sens défavorables selon l'Eurocode 3 et l'AISI-90 sont différents malgré le fait que la position du centre de gravité de la section effective à  $f_y$  est forcément la même pour les deux approches.

L'examen des courbes de déplacement du centre de gravité de la figure 5.39, Eurocode 3, et de la figure 5.40, AISI-90, montre que les courbes de l'Eurocode 3 sont plus raides que celles de l'AISI-90 lors du passage du stade pré-voilé au stade voilé, près de l'origine. Ceci est dû au fait que les courbes de voilement de l'Eurocode 3 prennent le voilement "en retard", comme déjà mentionné au paragraphe 2.5.2, voir figure 2.42 à 2.44.

Dans les figures 5.39 à 5.41 on peut aussi constater que quelques courbes de déplacement du centre de gravité de la section effective atteignent la position du point de connexion et le dépassent allant de l'autre côté. Donc, dans ces cas, il y a un changement du signe de l'excentricité du point de connexion par rapport au centre de gravité de la section effective en cours de chargement. Ceci explique pourquoi il y a une inversion du déplacement du noeud 3 (milieu de la colonne) avec certaines courbes numériques des figures 5.31, 5.36 et 5.37. Afin d'illustrer ce changement d'excentricité, la figure 5.42 montre les déformées du profil CLC/2.2-180x60 avec une flèche initiale de  $+L/1000$  et selon l'Eurocode 3 pour les pas 6, 13 et 21, voir figure 5.39. Quant au sens de la déformée selon l'axe Y, on peut voir le passage progressif du sens négatif, figure 5.42a, vers le sens positif, figure 5.42c. On

peut voir aussi la diminution progressive de la largeur effective de l'âme, qui est à l'origine du déplacement du centre de gravité de la section effective dans le sens positif de l'axe y.

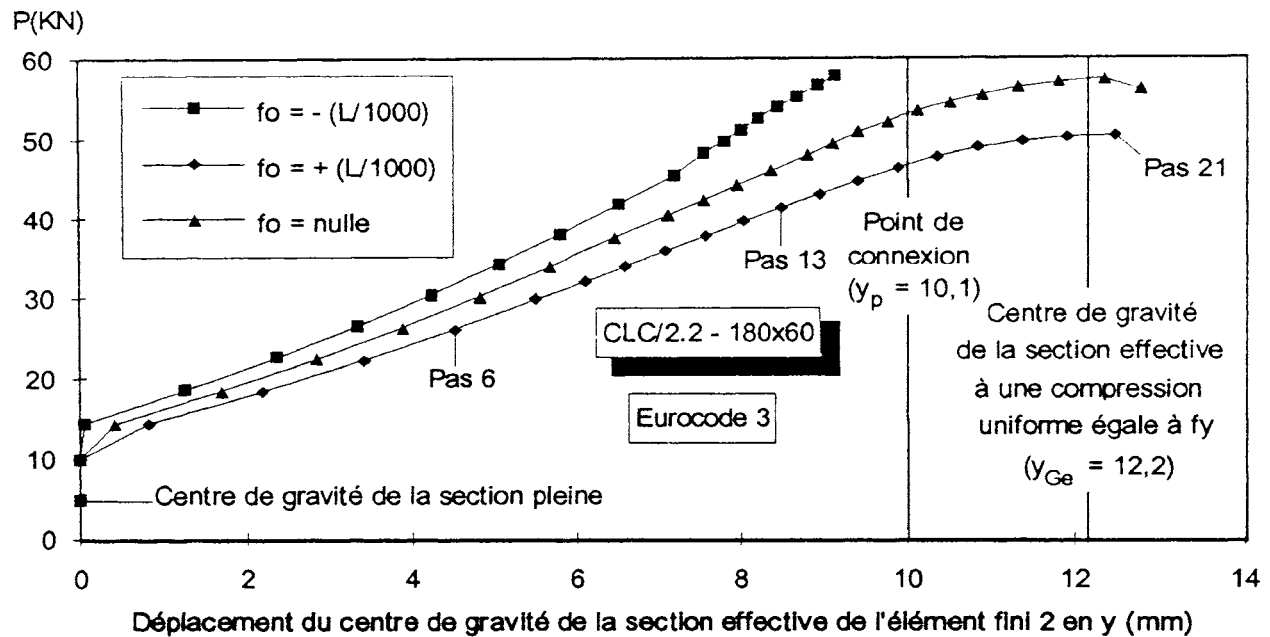


Figure 5.39- Déplacement du centre de gravité de la section effective.

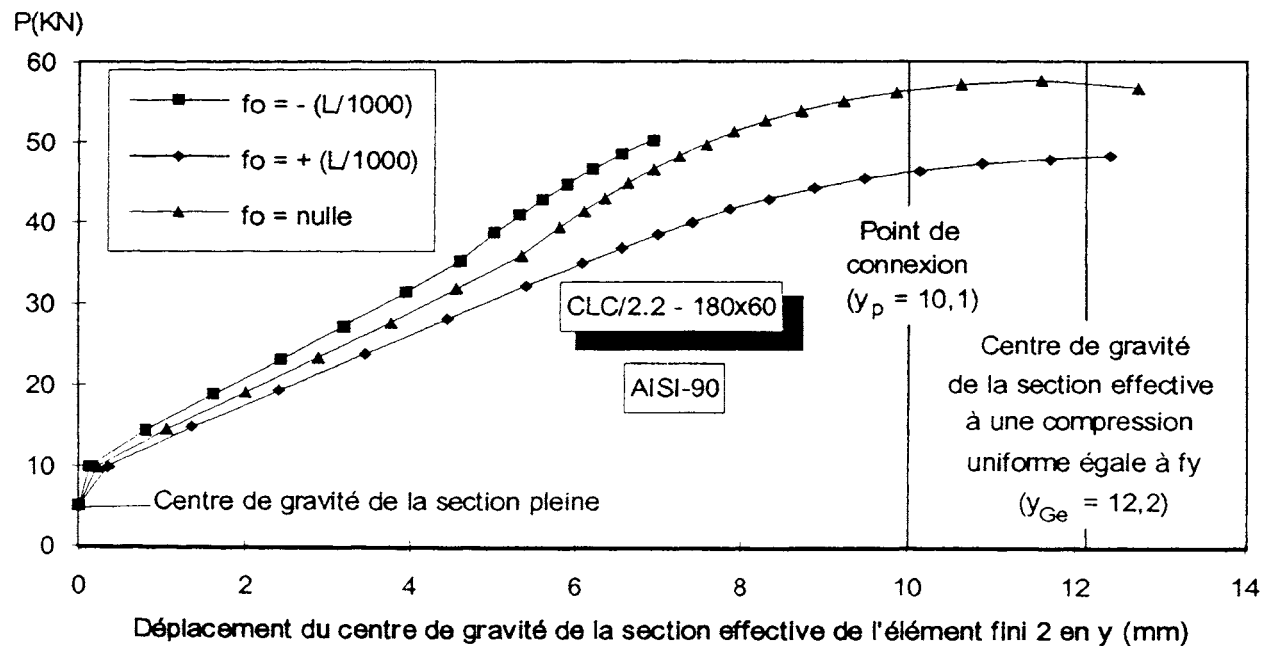


Figure 5.40- Déplacement du centre de gravité de la section effective.

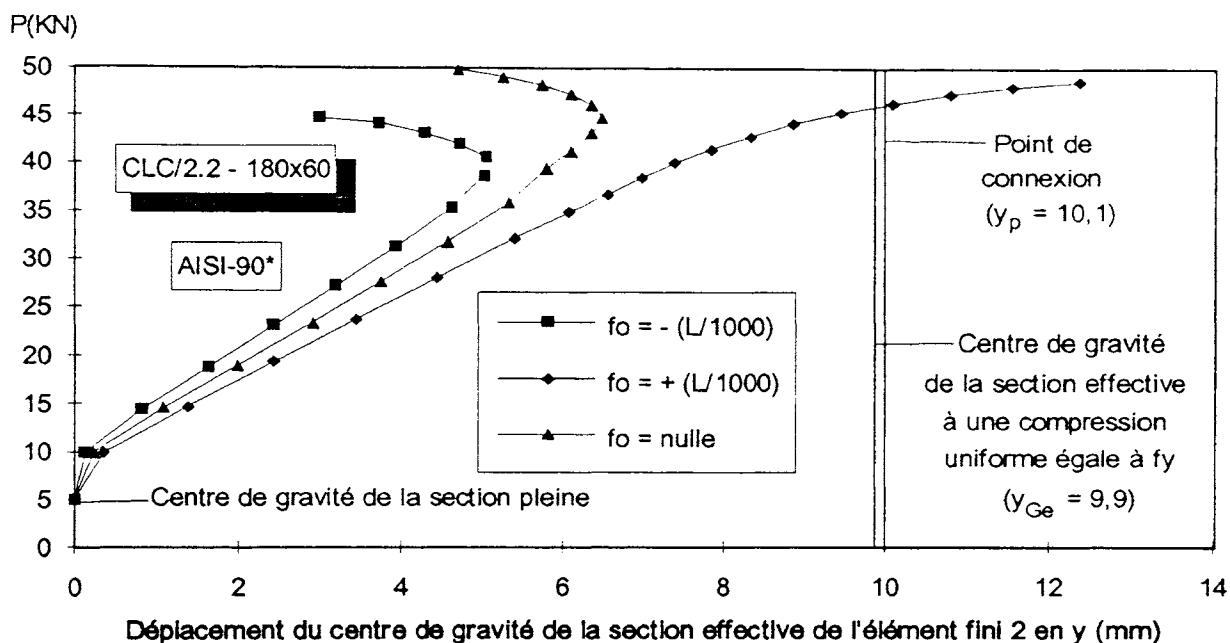


Figure 5.41- Déplacement du centre de gravité de la section effective.

A la figure 5.41, où on montre les courbes de déplacement du centre de gravité de la section effective selon l'AISI-90\*, on voit que, pour les flèches initiales de  $-L/1000$  et nulle, il y a une inversion du sens de déplacement du centre de gravité, avant qu'il atteigne la position du point de connexion. La pénalisation des largeurs effectives de la semelle et du raidisseur, proposée par l'AISI-90, est à l'origine de cette inversion. Donc, dans ces cas, il n'y a pas de changement du signe de l'excentricité du point de connexion par rapport au centre de gravité de la section effective. C'est pourquoi il n'y a pas d'inversion du déplacement du noeud 3, milieu de la colonne, pour les courbes de l'AISI-90\* des figures 5.36 et 5.37.



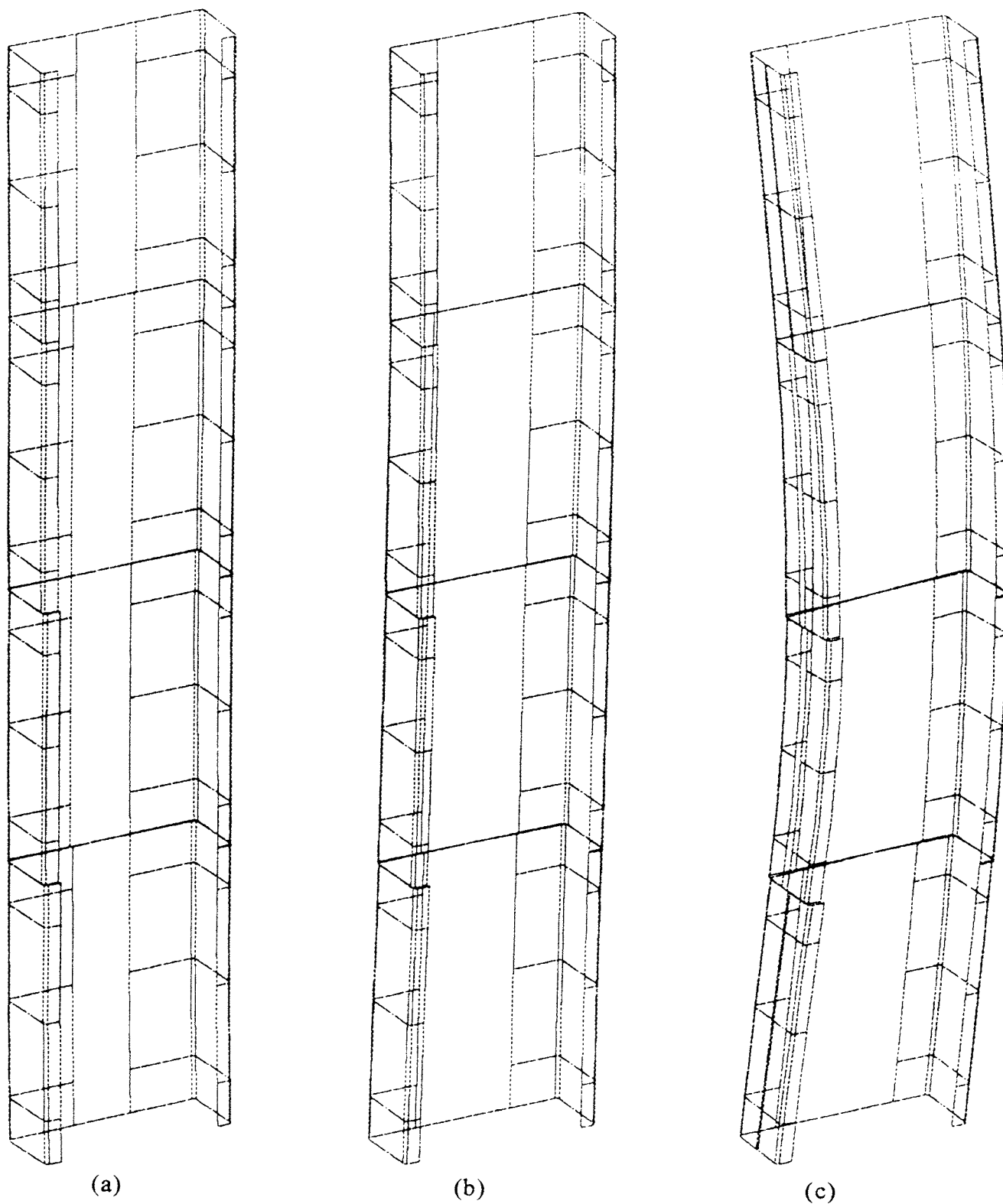


Figure 5.42- Visualisation de la déformée du profil CLC/2.2-180x60 selon l'Eurocode 3, flèche initiale égale à  $+L/1000$  (voir figure 5.39), déformée amplifiée 15 fois.

- (a) Pas 6;
- (b) Pas 13;
- (c) Pas 21.

Les tableaux 5.26 et 5.27 donnent les charges de ruine numériques en élasticité pure, en élasto-plastique et en voilement selon l'Eurocode 3 pour plusieurs valeurs de la flèche initiale, pour les profils CLC/1-120x60 (flambement par flexion) et CLC/1-90x90 (flambement par flexion-torsion), respectivement. Leurs représentations graphiques se trouvent aux figures 5.43 et 5.44, respectivement. Dans le cas particulier de ces deux profils, l'examen de ces tableaux et de ces figures permet de faire les remarques suivantes:

- a) Si on néglige le voilement, on note que le sens défavorable de la flèche initiale est normalement le sens négatif, comme déjà dit au paragraphe 3.3.2.1. Pourtant, lorsqu'on considère le voilement, on constate que, pour ces profils, le sens défavorable est le sens positif. Comme déjà expliqué, ceci est dû au fait que le centre de gravité de la section effective, à  $f_y$ , se situe à droite du point d'application de la charge ou du centre de gravité de la section pleine (charge centrée) pour ces deux profils;
- b) Lorsqu'on compare les courbes de charges de ruine en élasto-plastique et en voilement des figures 5.43 et 5.44, on s'aperçoit que la sensibilité de la valeur de la charge de ruine à l'amplitude de la flèche initiale est très faible quand on considère le voilement, par rapport au cas élasto-plastique. De nouveau, ceci s'explique aussi par le fait que la charge centrée sur la section pleine serait, en effet, excentrée par rapport au centre de gravité de la section effective à  $f_y$ . Cette *excentricité* exerce un effet réducteur plus fort sur la charge de ruine que la déformée initiale. Par exemple, pour le profil CLC/1-120x60, la valeur de  $L/1000$  est de 1,524 mm, alors que la distance entre le point de connexion et le centre de gravité de la section effective à  $f_y$  vaut 8,14 mm.

CLC/1 - 120x60			
Déf. Initiale Sinusoïdale $f_0 / (L/1000)$	$P_r$ (KN)		$P_r$ (KN)
	Sans Voilement		Avec Voilement
	Elasticité pure	Elasto-plastique	Elasto-plastique
-2,0	317	PL 69,6	PL 40,8
-1,0	317	PL 77,6	PL 41,0
-0,5	317	PL 82,2	PL 41,8
-0,2	317	PL 85,2	PL 42,0
+0,05	317	PL 87,0	PL 42,0
+0,2	317	PL 85,5	PL 41,8
+0,5	317	PL 83,5	PL 41,0
+1,0	317	PL 79,2	PL 39,8
+2,0	317	PL 72,8	PL 37,4

Remarques:

- Selon l'Eurocode 3.
- Tous -> Flambement par flexion.
- PL -> Ruine limitée par début de plastification.
- Discrétisation avec 4 éléments finis.

Tableau 5.26-Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine du profil CLC/1-120x60.

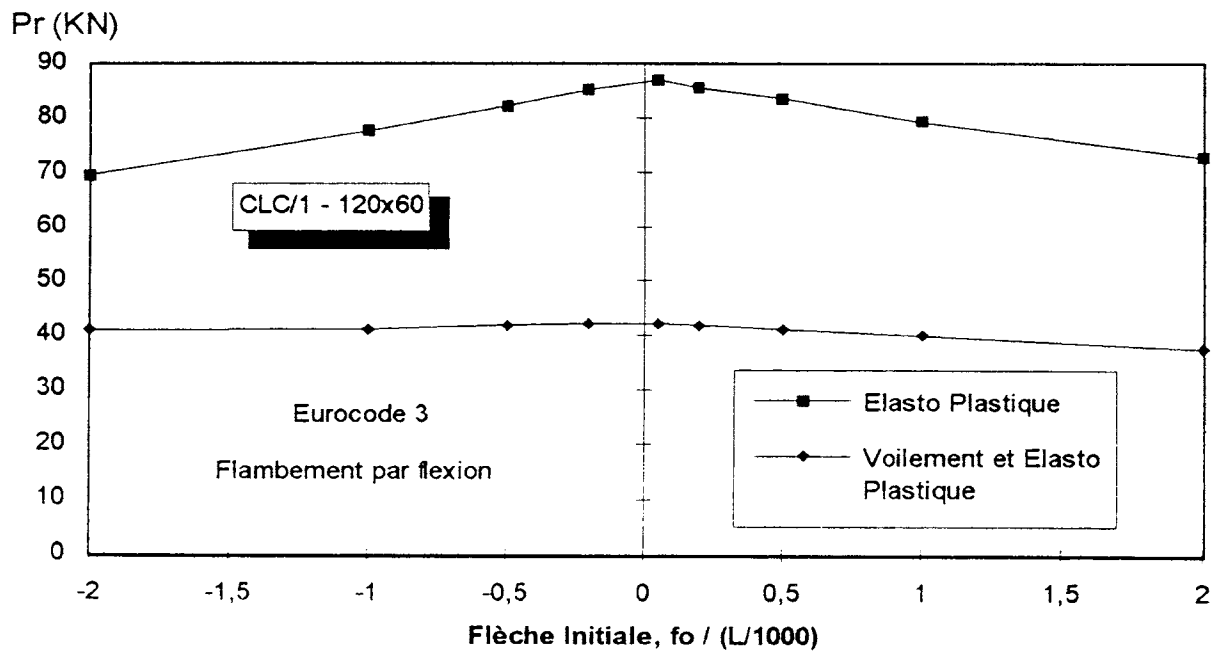


Figure 5.43- Représentation graphique du tableau 5.26.

CLC/1 - 90x90			
Déf. Initiale Sinusoïdale $f_0 / (L/1000)$	$P_r$ (KN)		$P_r$ (KN)
	Sans Voilement		Avec Voilement
	Elasticité pure	Elasto-plastique	Elasto-plastique
-2,0	EL 147,0	PL 70,1	PL 49,0
-1,0	EL 154,4	PL 82,6	PL 51,5
-0,5	EL 159,1	PL 91,9	PL 51,8
-0,2	EL 162,9	PL 100,5	PL 52,5
+0,05	EL 167,8	PL 106,9	PL 55,2
+0,2	EL 163,8	PL 100,5	PL 51,5
+0,5	EL 161,5	PL 92,5	PL 49,3
+1,0	EL 159,1	PL 83,2	PL 46,8
+2,0	EL 156,4	PL 70,2	PL 42,3

Remarques:

- Selon l'Eurocode 3.
- Tous -> Flambement par flexion torsion.
- EL -> Ruine en régime élastique.
- PL -> Ruine limitée par début de plastification.
- Discrétisation avec 4 éléments finis.

Tableau 5.27-Influence de la déformée initiale sur la charge de ruine du profil CLC/1-90x90.

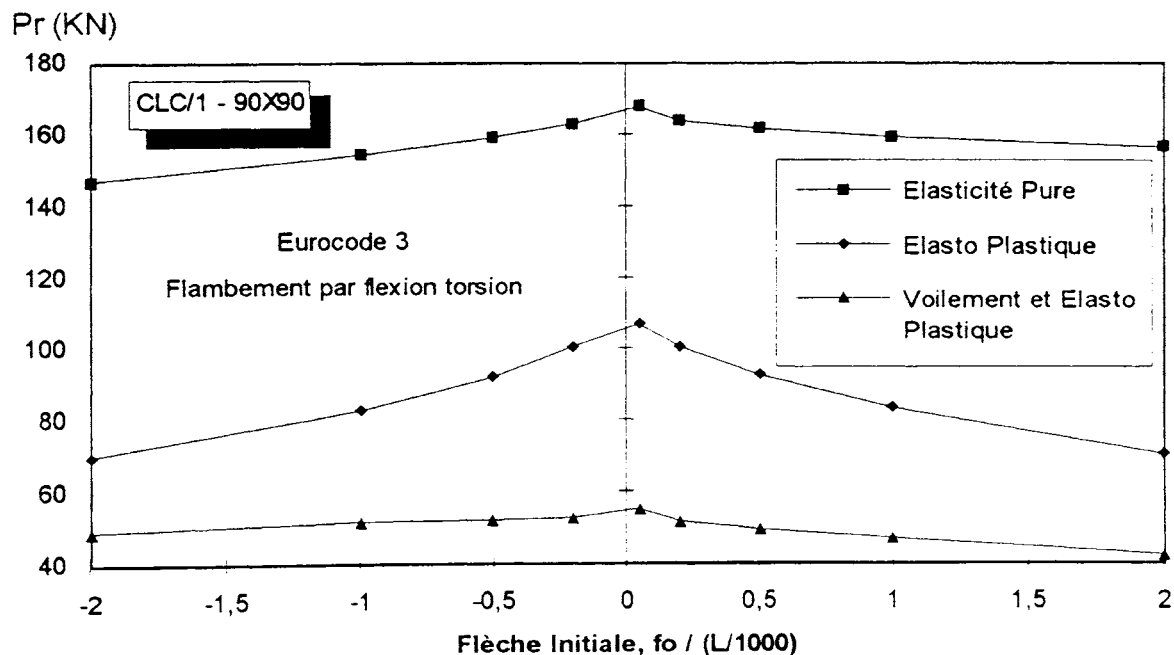


Figure 5.44- Représentation graphique du tableau 5.27.

Finalement, la figure 5.45 montre les courbes de charge x déplacement selon les approches de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90\* pour le profil CLC/4-120x60 avec la flèche initiale donnée au tableau 5.23. Pour chaque approche, on a calculé les courbes numériques pour les 3 valeurs de la variable Iter données sur cette figure. Le but de cette figure est de justifier pourquoi on a adopté une valeur de Iter égale à 2. Cette figure montre que le chemin d'équilibre et la charge de ruine sont pratiquement les mêmes si on utilise une valeur de Iter plus grande que 2. En plus, l'effort de calcul est remarquablement plus grand pour des valeurs de Iter plus grandes que 2 (le nombre total d'itérations est plus grand). C'est pourquoi on ne fait varier les largeurs effectives que sur les deux premières itérations de chaque pas.

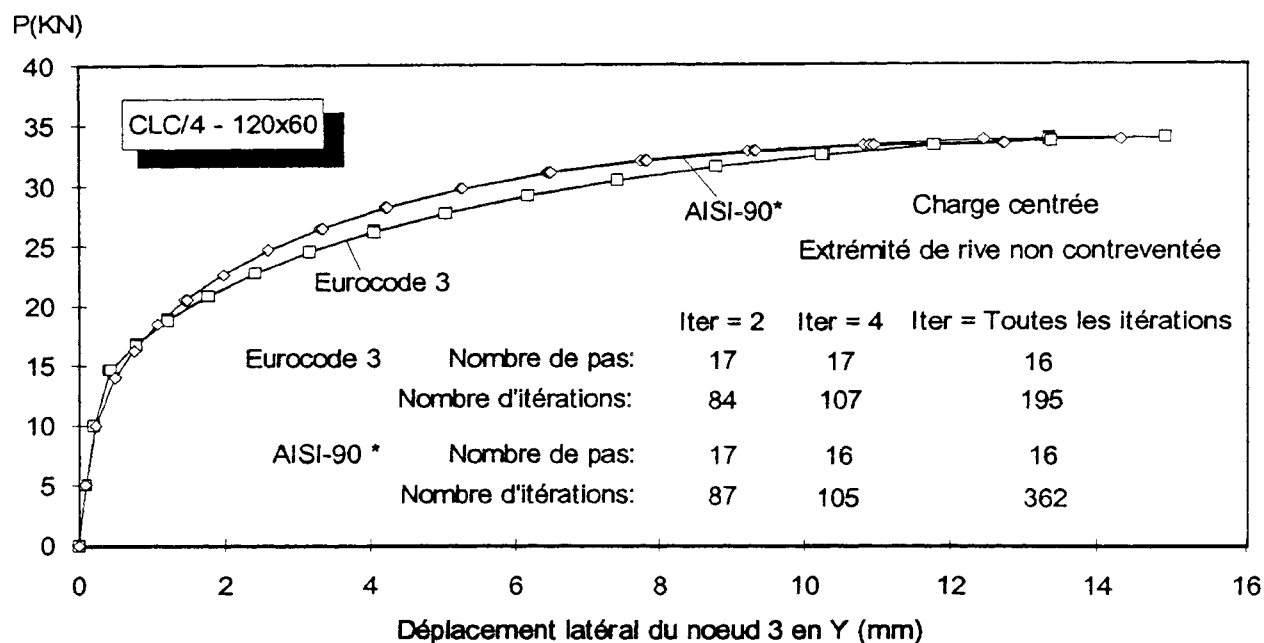


Figure 5.45- Courbes de charge x déplacement.

## 5.5. CONCLUSIONS

Ce chapitre a été consacré aux comparaisons numériques-expérimentales entre les résultats expérimentaux des essais de compression des profils à parois minces avec section du type cornière, U et C; et les prévisions numériques trouvées par élément fini de poutre spatiale avec prise en compte du voilement au moyen de la méthode des largeurs effectives. Ainsi, les tronçons courts et les tronçons longs des profils à parois minces avec les sections reprises ci-dessus ont fait l'objet de l'étude de ce chapitre. On a aussi envisagé une étude de l'influence de l'amplitude et du sens de la déformée initiale sur la charge de ruine. On espère ainsi, avoir approfondi la connaissance sur le comportement théorique des profilés à parois minces à l'aide de la méthode des largeurs effectives.

En ce qui concerne les cornières, on a découvert que la notion de tronçon court pour ce type de profil n'existe pas. En fait, on ne peut pas dissocier le flambement global du

voilement local pour simuler le comportement du tronçon court. On a aussi vu que cette interaction entre les deux phénomènes est due à l'inertie en gauchissement qui joue un rôle plus important pour les tronçons courts. Par contre, pour les tronçons longs, l'effet du voilement local est moins important à cause de la similitude du flambement par torsion de la cornière.

Quant aux profils avec section en U, on a constaté que la prise en compte de l'interaction en voilement entre les plaques (proposition A) est indispensable pour obtenir une bonne corrélation numérique-expérimentale pour les tronçons longs. Le seul défaut de la proposition A est que les coefficients de voilement utilisés sont calculés pour la section soumise à une compression uniforme et donc, ne tiennent compte ni d'un gradient de contraintes sur la section, ni du changement progressif de ce gradient de contraintes en cours de chargement. Par contre, on rappelle que la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord est calculée avec la contrainte moyenne de la partie comprimée de la largeur effective.

Pour les profils C, les résultats numériques ont été calculés selon les approches de l'Eurocode 3, de l'AISI-90, de l'AISI-90\* et de la proposition A. Ces approches ont donné de bons résultats dans les cas où elles peuvent être appliquées suivant l'existence du contreventement des extrémités de rive. Cependant, pour les profils avec les extrémités de rive libres et avec l'excentricité de la charge du côté du raidisseur, la proposition A est en bonne corrélation avec le chemin d'équilibre expérimental. Ce fait montre que la prise en compte de l'interaction en voilement entre les plaques du profil est une technique générale pour traiter non seulement le profil C, mais aussi tous les autres profils trouvés en pratique. Cette proposition est plus simple que les spécifications compliquées de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90 pour calculer les largeurs effectives de la semelle et du raidisseur et, en plus, elle simplifie beaucoup la programmation. Du point de vue de l'ensemble de la section, l'efficacité du raidisseur est, en effet, une conséquence directe de l'interaction en voilement entre les plaques de la section. Le seul défaut de la proposition A de cette thèse est celui qui a déjà été discuté pour le profil U.

Lors de l'étude de l'influence de la déformée initiale sur la charge de ruine de colonnes à parois minces, on a vu que le sens défavorable de la flèche initiale peut être soit le sens négatif, soit le sens positif, et dépend, en général, de l'excentricité de la charge par rapport au centre de gravité de la section effective à  $f_y$ . Par contre, si on néglige le voilement, il est bien connu que le sens défavorable de la flèche initiale d'une colonne à section ouverte est toujours le sens négatif, côté ouvert plus comprimé.

Lors du calcul non-linéaire de structures formées par des poutres et des colonnes en acier, on adopte pour la déformée initiale de la structure son premier mode d'instabilité, le vecteur-propre venant du calcul d'instabilité linéaire en considérant la section pleine de chaque barre de la structure. Toutefois, lorsque les parois sont minces, il est préférable que le calcul de stabilité de la structure soit fait en considérant la section effective de

## V - Résultats

chaque barre de la structure, calculée pour une répartition de contraintes sur la section donnée par le calcul linéaire et avec la contrainte la plus grande en valeur absolue égale à la limite élastique  $f_y$ . Cette procédure est nécessaire pour ne pas se tromper quant au vrai sens défavorable de la déformée initiale sur les points de vue global (des noeuds) et local (des barres) par rapport au cas où on néglige le voilement. En plus, la charge critique ainsi obtenue tiendra compte, d'une certaine manière, du voilement des parois des éléments.

## **CHAPITRE 6**

### **CONCLUSIONS**

6.1. BILAN DE LA THESE	6.1
6.2. QUELQUES REMARQUES FINALES	6.2



# CONCLUSIONS

## 6.1. BILAN DE LA THESE

Les apports et les conclusions les plus importants de ce travail sont les suivants:

- a) La mise en évidence du défaut de la proposition de Mulligan pour le calcul de largeurs effectives de plaques en état de service. On a vu au chapitre 2 que sa proposition prend le voilement "en retard" pour des plaques très peu élancées. A la place, on a proposé l'utilisation d'une courbe de voilement paraboïdale lorsque la courbe de voilement de Mulligan présente ce type de problème;
- b) Eu égard au calcul de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord, on a constaté que l'élément fini ne converge pas si on prend la contrainte en compression la plus grande aux bords extérieurs de la plaque. Afin de ralentir la variation de sa largeur effective, on a envisagé son calcul en prenant la contrainte moyenne aux bords de la largeur effective  $b_e$  de la plaque. Cette procédure s'est révélée essentielle lors du calcul numérique de colonnes avec sections du type cornière et U;
- c) Le chapitre 3 apporte une vision globale de l'étude de la stabilité de colonnes comprimées grâce à la notion du cercle de stabilité de Vlassov. Ainsi, on a pu étudier le comportement du polynôme dérivé du problème des valeurs-propres et de ses racines d'une manière très générale;
- d) Au chapitre 4, la mise au point de l'introduction, dans l'élément fini de poutre spatiale de de Ville, d'une section transversale variable à chaque itération. La variation des caractéristiques géométriques de la section transversale a servi pour simuler l'interaction entre le voilement local et le flambement global au moyen de la méthode des largeurs effectives;
- e) Une meilleure compréhension du comportement des tronçons courts de cornières à parois minces. On a vérifié que, à cause de l'inertie en gauchissement, il n'existe plus de similitude entre le flambement par torsion et le voilement telle que celle qui existe pour les tronçons longs. Ainsi, la prise en compte de l'interaction entre le flambement par flexion-torsion et le voilement local est importante pour pouvoir comprendre le comportement des tronçons courts de cornières à parois minces;
- f) Pour les tronçons longs de profils U, la prise en compte de l'interaction en voilement entre les plaques, proposition A pour le calcul des largeurs effectives, est très importante pour l'obtention d'une bonne estimation de la charge de ruine;
- g) Malgré le fait que la proposition A pour le calcul de largeurs effectives ne tient pas compte du gradient de contraintes sur la section, on a vérifié que pour les tronçons longs de profil C, le chemin d'équilibre obtenu numériquement avec la proposition A

était en très bon accord avec le chemin d'équilibre expérimental au début du voilement. En plus, lorsque la charge était excentrée de manière telle que le raidisseur était plus comprimé que l'âme, le chemin d'équilibre numérique était aussi en bon accord avec le chemin d'équilibre expérimental sans devoir utiliser les propositions compliquées de l'AISI-90 pour tenir compte de l'efficacité du raidisseur;

- h) On a vu que le sens défavorable de la flèche initiale de colonnes comprimées à section ouverte est le sens négatif. Cependant, lorsque les parois sont minces, le sens défavorable de la flèche initiale peut changer à cause du voilement, comme on l'a constaté, par exemple, pour le profil C. C'est pourquoi on conseille de calculer la stabilité de structures formées par des éléments à parois minces en considérant les sections effectives des barres de la structure.

### **6.2. QUELQUES REMARQUES FINALES**

A titre de conclusions, on peut dire que la prise en compte de l'interaction entre les phénomènes d'instabilité globale et de voilement local au moyen de la méthode des largeurs effectives dans l'élément fini non-linéaire de poutre spatiale est intéressante. Néanmoins, cette thèse n'est que le début du développement de ce mariage entre l'élément fini (méthode numérique) et les largeurs effectives (méthode semi-empirique). Quant à la mise au point de la méthode de calcul des largeurs effectives dans l'élément fini, on peut faire les remarques suivantes:

- a) Au début de cette recherche, on s'en est tenu au fait que les largeurs effectives devaient être calculées selon les propositions de l'Eurocode 3 et de l'AISI-90. C'est pourquoi on a entrepris de les rendre utilisables dans l'élément fini de poutre spatiale. On a décidé ainsi parce que les propositions de ces normes est ce qu'il y a de plus récent, actuellement, en matière de largeurs effectives de plaques. Toutefois, on a vu qu'une bonne corrélation numérique-expérimentale a été obtenue pour la charge de ruine des profils U et pour le chemin d'équilibre au début du voilement pour les profils C, lorsque les largeurs effectives sont calculées selon la proposition A. Dès lors, il est tentant d'utiliser la manière la plus générale qui tient compte de l'interaction en voilement entre les parois du profil au moyen de coefficients de voilement appropriés et ce, avec ces derniers mis à jour à chaque itération pour tenir compte du changement du gradient de contraintes sur la section. Pour atteindre ce but, il s'avère nécessaire de joindre au programme de calcul une fonction de calcul d'instabilité par bandes finies pour trouver le multiplicateur critique de la répartition de contraintes sur la section. On espère ainsi pouvoir tenir compte d'une manière très générale de l'efficacité non seulement des raidisseurs des bords de plaques, mais aussi des raidisseurs intermédiaires de plaques, sans faire appel à des formulations semi-empiriques compliquées telles celles données dans les codes;

- b) Le calcul des largeurs effectives comme expliqué dans la remarque 'a' pourrait servir à relaxer la démarche utilisée pour le calcul de la largeur effective de la plaque appuyée sur un seul bord. En effet, il se pourrait qu'on puisse utiliser la contrainte au bord le plus comprimé au lieu de prendre la contrainte moyenne de la partie comprimée de la largeur effective;
- c) Le dernier problème qu'il reste à souligner est de vérifier si on peut utiliser la variable *Iter* avec une même valeur et discrétiser une barre avec la même quantité d'éléments finis pour n'importe quel type de section transversale si on calcule les largeurs effectives selon la remarque 'a'.

Dans cette thèse, on a étudié les sections cornière, U et C. Le programme de calcul a une fonction pour chaque type de section étudiée. Or, dans le domaine des profils à froid il y a une très grande variété de sections. Le seul moyen de rendre le programme applicable à tous les types de sections est de programmer une section généralisée. Dans ce but, on pourrait définir la section au moyen des coordonnées de ses coins, au lieu de donner au programme les dimensions de la section pour une forme pré-définie.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1- RONDAL, J. et DUBINA, D. Structures en Profils à Froid en Acier, Notes de cours, Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées et Université Technique de Timisoara - Faculté des Constructions, Juin 1992.
- 2- DUBINA, D. Coupled Instabilities and Interaction Phenomena in the Thin-Walled Compression Members, An Improved Interactive Buckling Approach, Technical University of Timisoara - Departement of Steel Structures, February 1991.
- 3- WEI-WEN YU. Cold-Formed Steel Design, New-York, Wiley-Interscience, 1985.
- 4- DYM, C. L. Stability Theory and its Applications to Structural Mechanics. Noordhoff International Publishing-Leyden, 1974.
- 5- CROLL, J. G. A. et WALKER, A. C. Elements of Structural Stability. Macmillan, 1972.
- 6- SAINT VENANT. Théorie de l'Elasticité des Corps Solides. Clebsch, 1883, p.704.
- 7- TIMOSHENKO, S. P. et GERE, J. M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, 1961.
- 8- BULSON, P. S. The Stability of Flat Plates. London, Chatto and Windus, 1970.
- 9- von KARMAN, T. Festigkeitsprobleme im Maschinembau. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 4, pp. 311-385.
- 10- YAMAKI, N. Post-Buckling Behaviour of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression. Transactions of the ASME, *Journal of Applied Mechanics*, September 1959, pp. 407-414 and June 1960, pp. 335-342.
- 11- MARGUERRE, K. NACA Technical Memorandum 833, 1937.
- 12- USAMI, T. Post-Buckling of Plates in Compression and Bending. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 108, N° ST3, March, 1982.
- 13- RHODES, J. and HARVEY, J. M. Plates in Uniaxial Compression with Various Support Conditions at the Unloaded Boundaries. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1971, Vol. 13, pp. 787-802.
- 14- RHODES, J. and HARVEY, J. M. Effects of Eccentricity of Load or Compression on the Buckling and Post-Buckling Behaviour of Flat Plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1971, Vol. 13, pp. 867-879.
- 15- RHODES, J. and HARVEY, J. M. and Fok, W. C. The Load-Carrying Capacity of Initially Imperfect Eccentrically Loaded Plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1975, Vol. 17, pp. 161-175.

## Bibliographie

- 16- RHODES, J. and HARVEY, J. M. Examination of Plate Post-Buckling Behaviour. ASCE, *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 103, N° EM3, 1977.
- 17- KOITER, W. T. Introduction to the Post-Buckling Behaviour of Flat Plates. *Colloque sur le Comportement Post-Critique des Plaques Utilisées en Construction Métallique*, Liège, November 1962, pp. 17-35.
- 18- WALKER, A. C. The Post-Buckling Behaviour of Simply Supported Plates. *The Aeronautical Quarterly*, Vol. XX, August 1969, pp. 203-220.
- 19- MAYERS, J. Aircraft and Missiles Structures. Lecture Notes, Stanford University, Stanford, California, 1964.
- 20- KOITER, W. T. Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht. Thesis, Delft, H. J. Paris, Amsterdam (1945). English Translation issued as NACA TT F-10, 833 (1967).
- 21- von KARMAN, T.; SECHLER, E. E. and DONNELL, L. H. The Strength of Thin Plates in Compression. Transactions ASME, *Applied Mechanics*, APM-54-5, 1932, pp. 53-57.
- 22- WINTER, G. Strength of Thin Steel Compression Flanges. Transactions ASCE, Vol. 112, 1947.
- 23- GERARD, G. Failure of Plates and Composite Elements. NACA, Technical Note 3784, August, 1957.
- 24- JOMBOCK, J. R. and CLARK, J. W. Post-Buckling Behaviour of Plates. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 87, N° ST5, June, 1961.
- 25- WINTER, G. Theoretical Solutions and Test Results. Thin-Walled Structures, 8th Congress of IABSE, Preliminary Publication, New York, 1968, pp. 101-112.
- 26- CHILVER, A. H. The Stability and Strength of Thin Walled Steel Struts. *The Engineer*, Vol. 7, August, 1953, pp. 180-183.
- 27- FAULKNER, D. Compression Tests on Welded Eccentrically Stiffened Plate Panels. Steel Plated Structures, Crosby Lockwood Staples, London 1977, pp. 581-617.
- 28- RONDAL, J. et MAQUOI, R. Stabilité des Poteaux en Profils Creux en Acier. Soditube, Notice: 1117, 1<sup>è</sup> édition, Mai, 1986.
- 29- KALYANARAMAN, V.; PEKOZ, T. and WINTER, G. Unstiffened Compression Elements. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 103, N° ST9, September, 1977.
- 30- THOMASSON, P. O. Thin-Walled C-Shapped Panels in Axial Compression. Swedish Council for Building Research, Document D1:1978, Stockholm.
- 31- DEWOLF, J. T. and GLADDING. Post-Buckling Behaviour of Beam Webs in Flexure. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 104, N° ST7, July, 1978.

- 32- DEWOLF, J. T.; PEKOZ, T. and WINTER, G. Local and Overall Buckling of Cold-Formed Members. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 100, N° ST10, October, 1974.
- 33- MULLIGAN, G. P. The Influence of Local Buckling on the Structural Behaviour of Singly-Symmetric Cold-Formed Steel Columns. Department of Structural Engineering, Cornell University, Report n° 83-1, March, 1983.
- 34- MULLIGAN, G. P. and PEKOZ, T. Local Buckling Interaction in Cold-Formed Columns. ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, N° 3, March, 1987.
- 35- MULLIGAN, G. P. and PEKOZ, T. Locally Buckled Thin-Walled Columns. ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 110, N° 11, November, 1984.
- 36- DAWSON, R. G. and WALKER, A. C. Post-Buckling of Geometrically Imperfect Plates. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 98, N° ST1, January, 1972.
- 37- KÖNIG, J. Transversal Loaded Thin-Walled C-Shaped Panels with Intermediate Stiffeners. Ph. D. Thesis, Div. of Steel Construction, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1978.
- 38- KALYANARAMAN, V. Local Buckling of Cold-Formed Steel Members. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 105, N° ST5, May, 1979.
- 39- CHILVER, A. H. A Generalized Approach to the Local Instability of Certain Thin-Walled Struts. *The Aeronautical Quarterly*, Vol. 4, August, 1953.
- 40- RHODES, J. and HARVEY, J. M. Plain Channel Section Struts in Compression and Bending Beyond the Local Buckling Load. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 8, 1976, pp. 511-519.
- 41- JONSSON, J. Recursive Finite Elements for Buckling of Thin-Walled Beams. Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, Serie R, N° 263, 1990.
- 42- CHEUNG, Y. K. Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs. ASCE, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 94, N° EM6, December, 1968.
- 43- CHEUNG, Y. K. Folded Plate Structures by Finite Strip Method. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 95, N° ST12, December, 1969.
- 44- CHEUNG, Y. K. Finite Strip Method in Structural Analysis. Oxford, Pergamon Press, 1976.
- 45- PRZEMIENIECKI, J. S. Finite Element Structural Analysis of Local Instability. *AIAA Journal*, Vol. 11, N° 1, January, 1973.
- 46- PLANK, R. J. and WITTRICK, W. H. Buckling Under Combined Loading of Thin Flat-Walled Structures by a Complex Finite Strip Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, 1974, pp. 323-339.

## Bibliographie

- 47- GRAVES SMITH, T. R. and SRIDHARAN, S. A Finite Strip Method for the Buckling of Plate Structures Under Arbitrary Loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 20, 1978, pp. 685-693.
- 48- BLEICH, F. Buckling Strength of Metal Structures. New-York, McGraw-Hill, 1952.
- 49- COSTA FERREIRA, C. M. et RONDAL, J. Flambement des Cornières à Parois Minces. *Annales des Travaux Publics de Belgique*, N° 2, 1986.
- 50- BATISTA, E. M. Etude de la Stabilité des Profils à Parois Minces et Section Ouverte de Types U et C. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Département MSM, Université de Liège, 1988.
- 51- DESMOND, T. P.; PEKOZ, T. and WINTER, G. Edge Stiffeners for Thin-Walled Members. ASCE, *Journal of the Structural Division*, Vol. 107, N° ST2, February, 1981.
- 52- HANCOCK, G. J. Distorsional Buckling of Steel Storage Rack Columns. ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, N° 12, December, 1985.
- 53- LAU, S. C. W. and HANCOCK, G. J. Distorsional Buckling Formulas for Channel Columns. ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, N° 5, May, 1987.
- 54- LUONGO, A. and PIGNATARO, M. Buckling and Post-Buckling Analysis of Stiffened Channels Under Uniform Compression. *Construction Métallique*, N° 4, 1986.
- 55- SERRETE, R. and PEKOZ, T. Strength of Laterally Unsupported Compression Flanges and Panels. *Fourth International Colloquium on Structural Stability*, Mediterranean Session, Istanbul, September 16-20, 1991.
- 56- EUROCODE 3. Design of Steel Structures. Updated Version of Annex A, Part 1.3, Cold-Formed Thin Gauge Members and Sheeting: May 5, 1992. Document Reference: 3312-CEN/TC 250/SC 3.
- 57- AISI-90 (LRFD). Draft for Load and Resistance Factor Design Specification for Cold-Formed Steel Structural Members. *American Iron and Steel Institute*, Research Report CF 90-1, August 1990.
- 58- STOWELL, E. Z. Compressive Strength of Plates. NACA, Technical Note 2020, 1950.
- 59- MAYERS, J. and BUDIANSKY, B. Analysis of Behavior of Simply Supported Flat Plates Compressed Beyond the Buckling Load into the Plastic Range. NACA, Technical Note 3368, 1955.
- 60- van der NEUT, A. The Interaction of Local Buckling and Column Failure of Thin-Walled Compression Members. *Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics*, p. 389, Springer (1969).

- 61- van der NEUT, A. The Sensitivity of Thin-Walled Compression Members to Column Axis Imperfection. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 9, 1973, pp. 999-1011.
- 62- KLOPPEL, K. and SCHUBERT, J. The Calculation of the Carrying Capacity in the Post-Buckling Range of Thin-Walled Box Columns Loaded by Concentric and Excentric Compressive Force. Publications of the Institute for Statics and Steel Construction, Darmstadt, 1971.
- 63- SKALOUD, M. and NAPRSTEK, J. Limit State of Thin-Walled Steel Columns. Rosprawy Ceskoslovenske Akademie VED, ISSN0069-2301, 1977.
- 64- BATISTA, E. M. Une Méthode de Calcul des Poteaux en Acier à Section Ouverte et Parois Minces, *Annales des Travaux Publics de Belgique*, N° 4, 1987, pp. 61-75.
- 65- BATISTA, E. M.; BATISTA, R. C. and AMEIDA, S. B. A Numerical Solution for Nonlinear Analysis of C-Shapped Cold-Formed Columns. Stability of Metal Structures, *Proceedings of Fourth International Colloquium on Structural Stability*, Asian Session, Beijing, China, October 10-12, 1989.
- 66- CHAJES, A. and CHURCHILL, J. E. Nonlinear Frame Analysis by Finite Elements Methods. ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, N° 6, June, 1987.
- 67- BATISTA, R. C. and BATISTA, E. M. Behaviour and Ultimate Load Estimates for Thin-Walled Trussed Plane Frames. *Thin-Walled Structures*, Vol. 14, 1992, pp. 265-278.
- 68- VLASSOV, B. Z. Pièces Longues en Voiles Minces. Editions Eyrolles, 1962.
- 69- de VILLE de GOYET, V. L'Analyse Statique Non Linéaire par la Méthode des Elements Finis de Structures Spatiales Formées de Poutres à Section Non Symétrique. Thèse de Doctorat, Département MSM, Université de Liège, Belgique, 1988.
- 70- GIONCU, V. General Theory of Coupled Instabilities. General Report, *First International Specialty Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures*, CIMS 92, October 12-14, 1992, Timisoara, Romania.
- 71- SFINTESCO, D. Fondement Expérimental des Courbes Européennes de Flambement. *Construction Métallique*, N° 3, 1970, pp. 5-12.
- 72- BEER, H. and SCHULTZ, G. Bases Théoriques des Courbes Européennes de Flambement. *Construction Métallique*, N° 3, 1970, pp. 37-57.
- 73- RONDAL, J. et MAQUOI, R. Formulations d'Ayrton Perry pour le Flambement de Barres Métalliques. *Construction Métallique*, N° 4, 1979.
- 74- AYRTON, W. E. and PERRY, J. On Struts. *The Engineer*, Vol. 62, 1886.



## Bibliographie

- 75- JONHSTON, B. G. Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. New-York, John Wiley and Sons, 1976.
- 76- RONDAL, J. Contribution à l'Etude de la Stabilité des Profils Creux à Parois Mince. Thèse de Doctorat, Faculté de Sciences Appliquées, Département MSM, Université de Liège, 1984.
- 77- GRIMAULT, J. P.; MAQUOI, R.; MOUTY, J.; PLUMIER, A. et RONDAL, J. Stabilité des Poutres-Poteaux en Profils Creux à Parois Mince. *Construction Métallique*, N° 4, 1984, pp. 33-41.
- 78- HSIAO, L.; YU, W. W. and GALAMBOS, T. V. AISI LRFD Method for Cold-Formed Steel Structural Members. ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 116, N° 2, February, 1990.
- 79- DUBINA, D. and GEORGESCU, M. Design Formulas for Interactive Buckling of Thin-Walled Compression Members. *11th International Conference on Cold-Formed Steel Structures*, October 20-22, 1992, St. Louis, Missouri, United States.
- 80- LEE, S. L., MANUEL, F. S. and ROSSOW, E. C. Large Deflections and Stability of Elastic Frames. ASCE, *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 94, N° EM2, April, 1968.
- 81- FREY, F., de VILLE de GOYET, V., LEMAIRE, E., JETTEUR, P., RICHARD, Ch., BERTARINI, I., TAQUET, F., BOERAËVE, Ph., LOGNARD, B., "FINELG - Programme électronique d'éléments finis non linéaires - User's Manual" MSM, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège IREM, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Mars 1990.
- 82- COSTA FERREIRA, C. M. et RONDAL, J. Etude Expérimentale de la Stabilité des Cornières à Parois Mince Profilées à Froid. Université de Liège, Laboratoire de Stabilité de Constructions, Rapport N° 149, Janvier 1985.
- 83- BATISTA, E. M. Essais de Profils C et U en Acier Pliés à Froid, Université de Liège, Laboratoire de Stabilité des Constructions, Rapport N° 157, Septembre 1987.
- 84- BATISTA, E. M. Essais de Profils C et U en Acier Pliés à Froid - Annexes, Université de Liège, Laboratoire de Stabilité des Constructions, Rapport N° 158, Septembre 1986.

## **ANNEXE A**

### **DIAGRAMMES DE CHARGE X RACCOURCISSEMENT DES TRONÇONS COURTS**

Dans cette annexe on trouve les diagrammes expérimentaux et numériques de charge x raccourcissement des tronçons courts en profils C essayés par MULLIGAN [33].

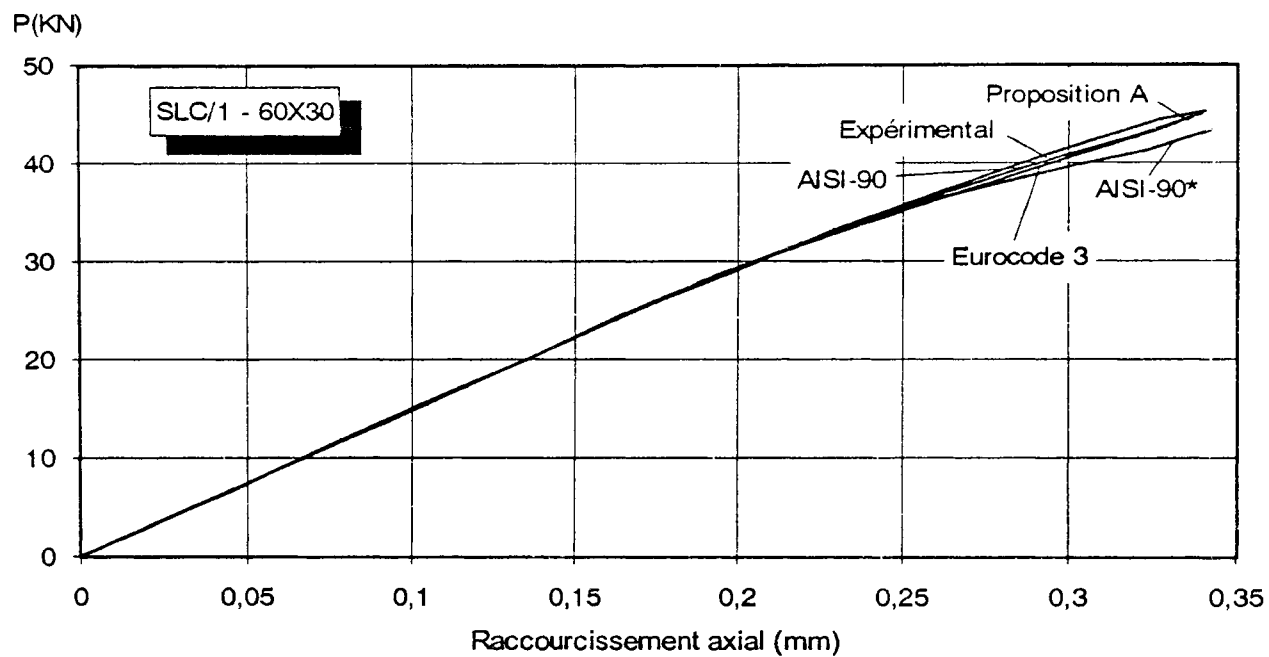


Figure A.1

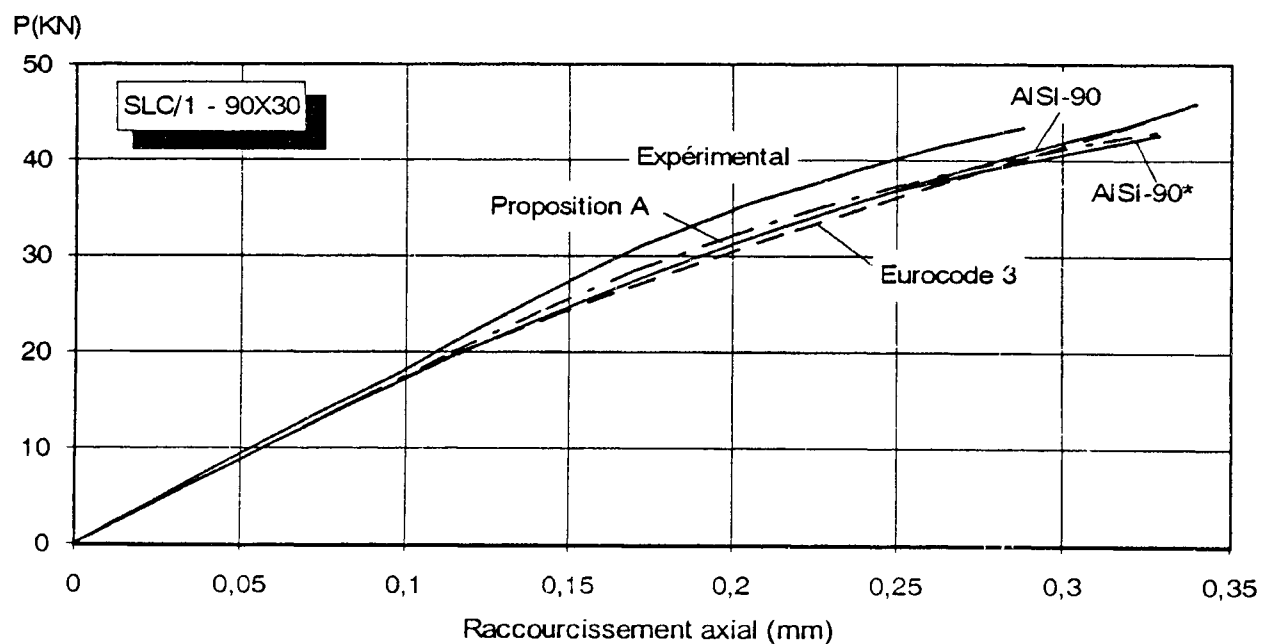


Figure A.2

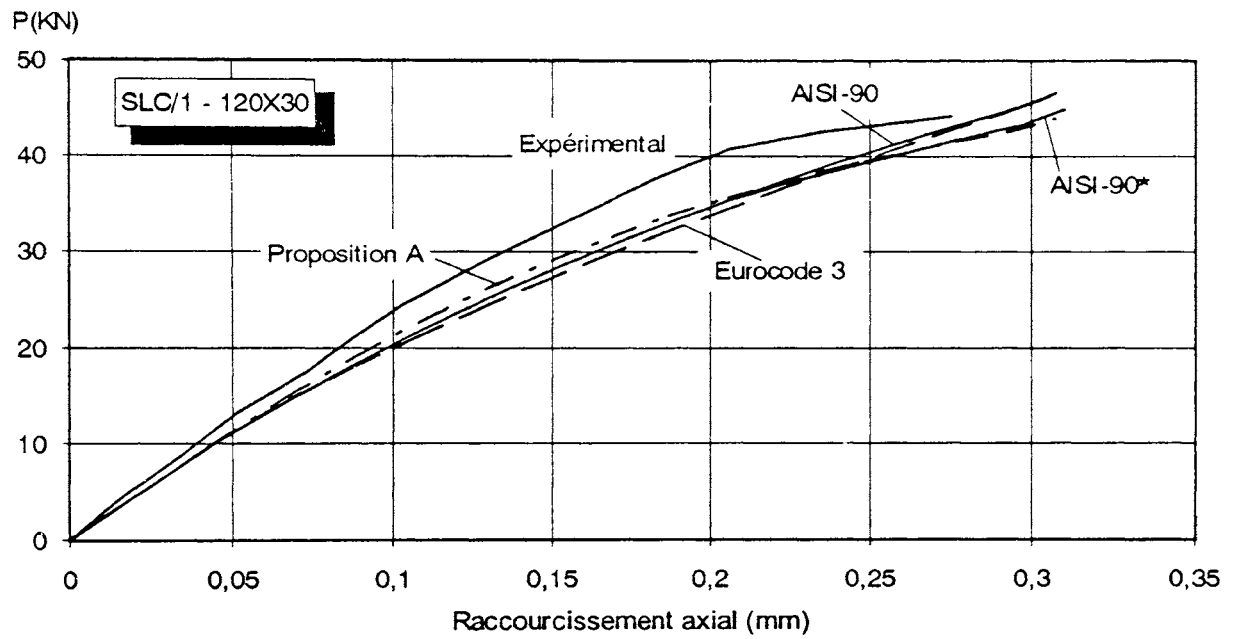


Figure A.3

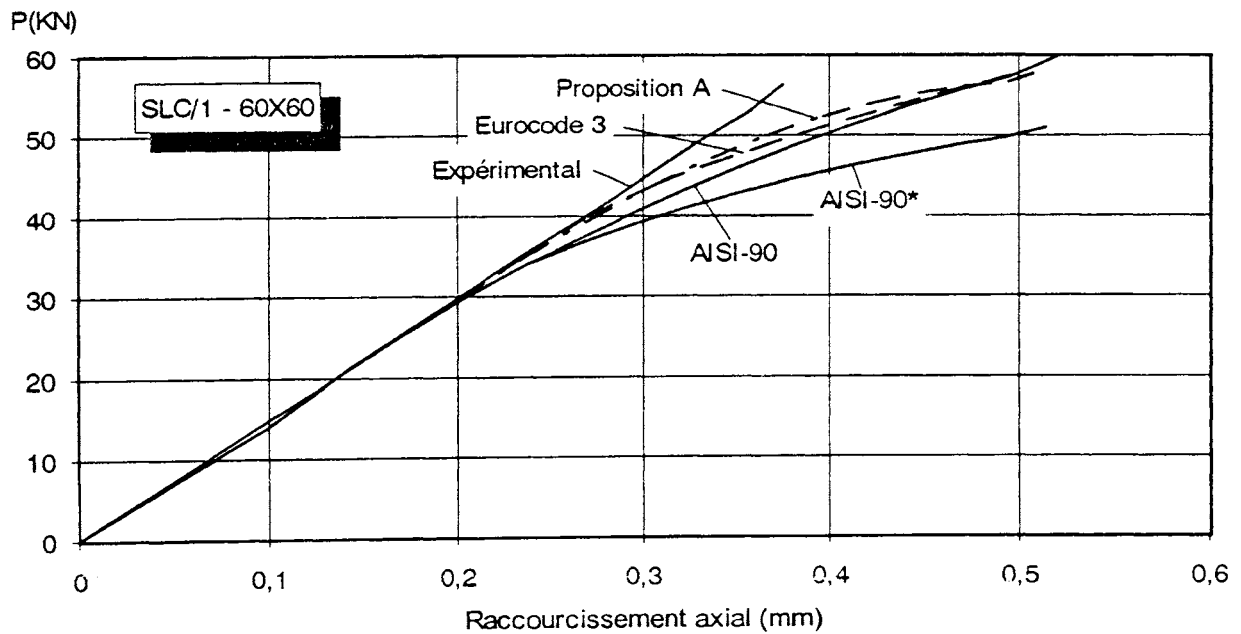


Figure A.4

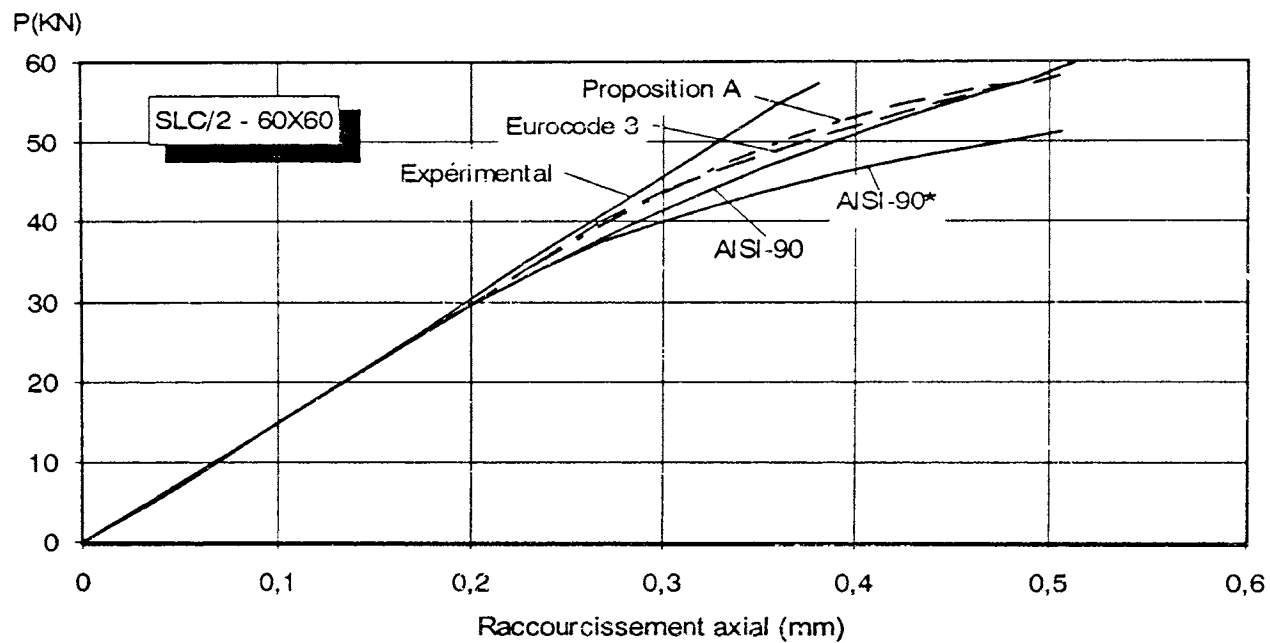


Figure A.5

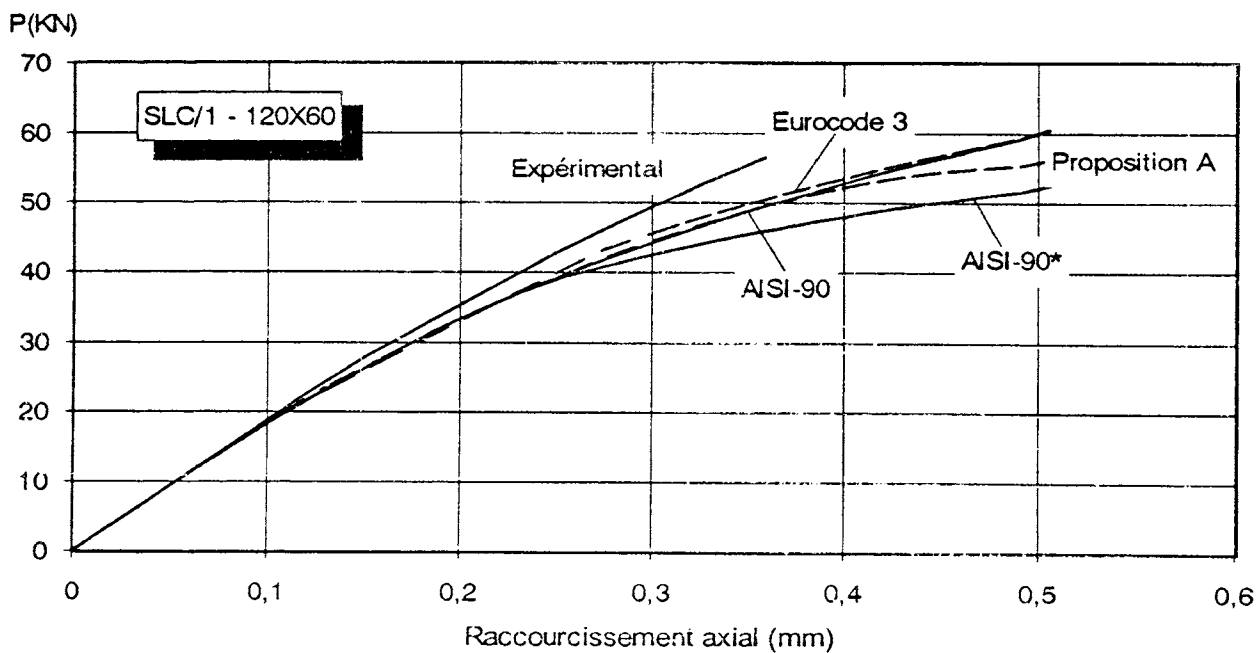


Figure A.6

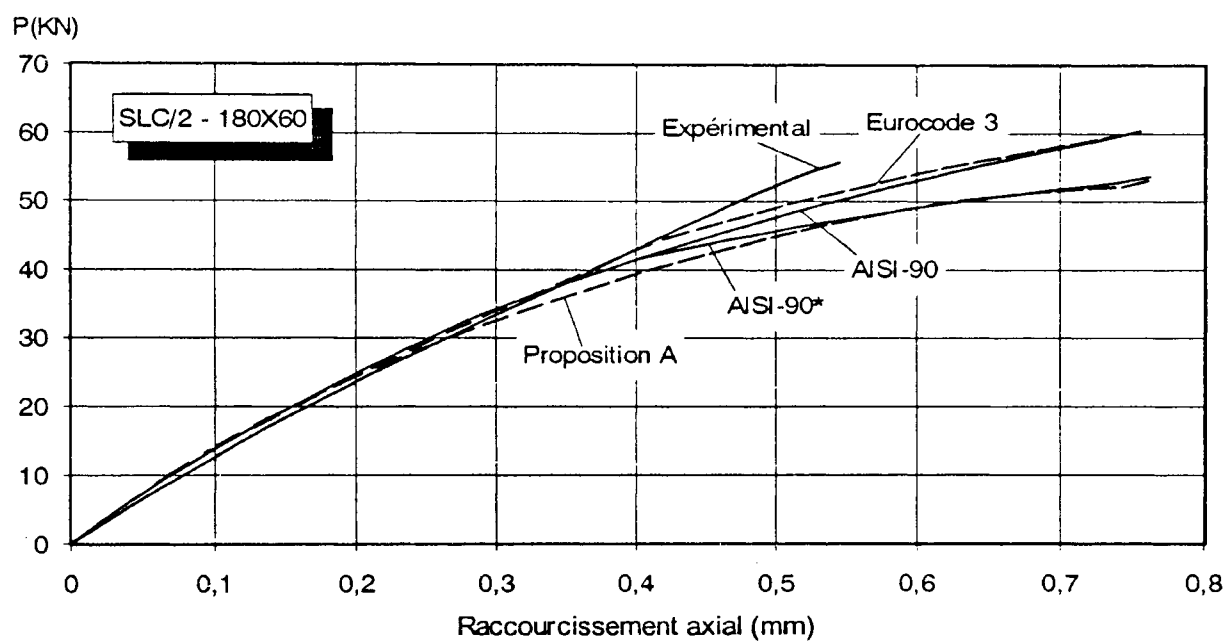


Figure A.7

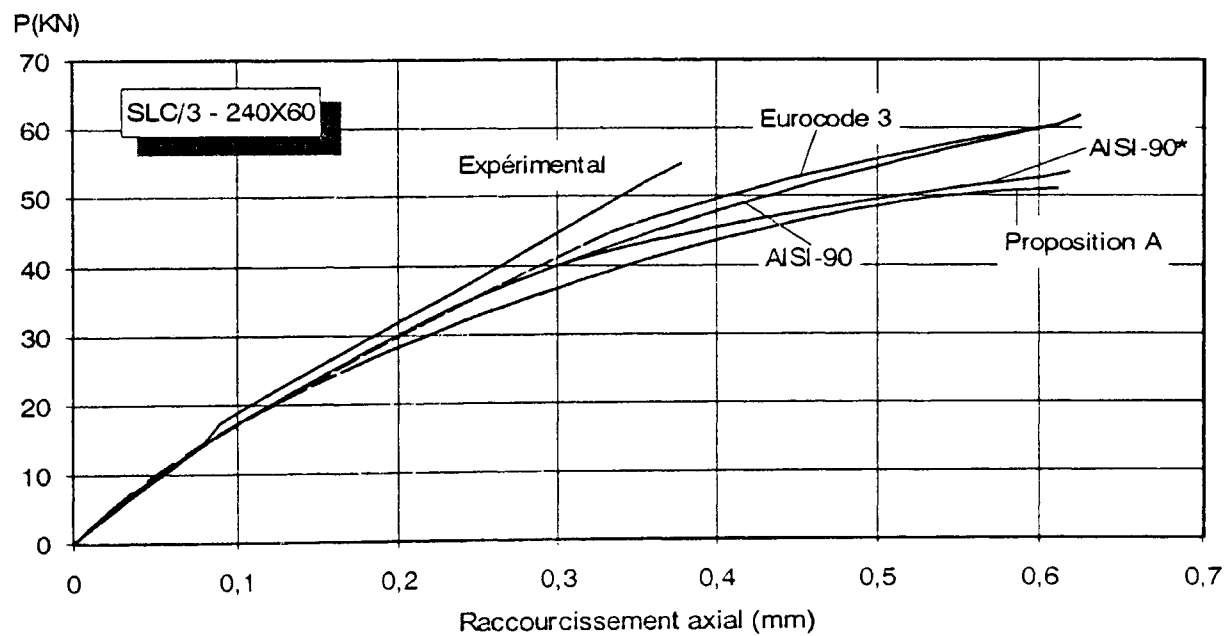


Figure A.8

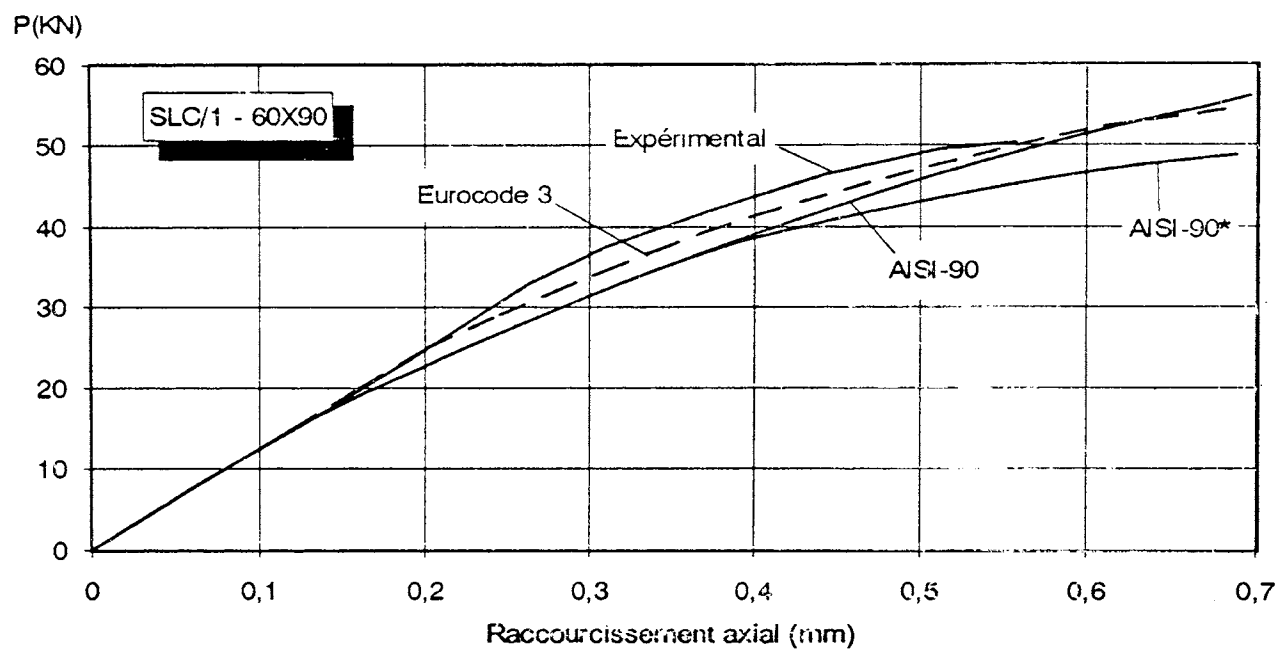


Figure A.9

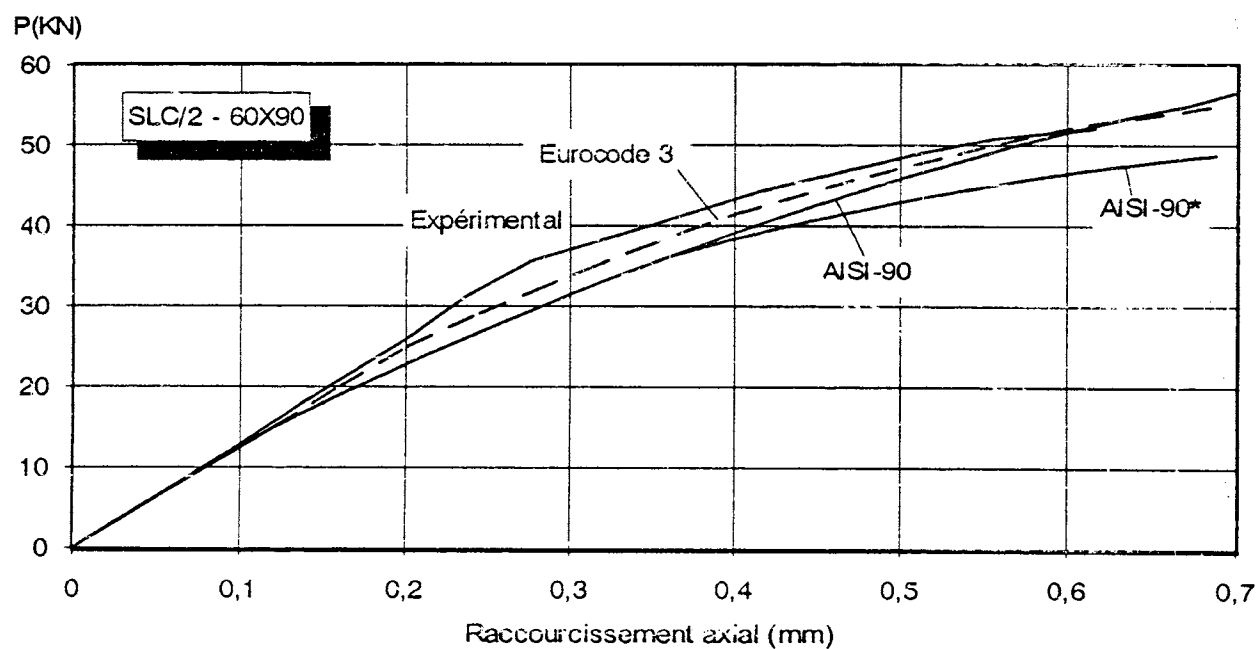


Figure A.10

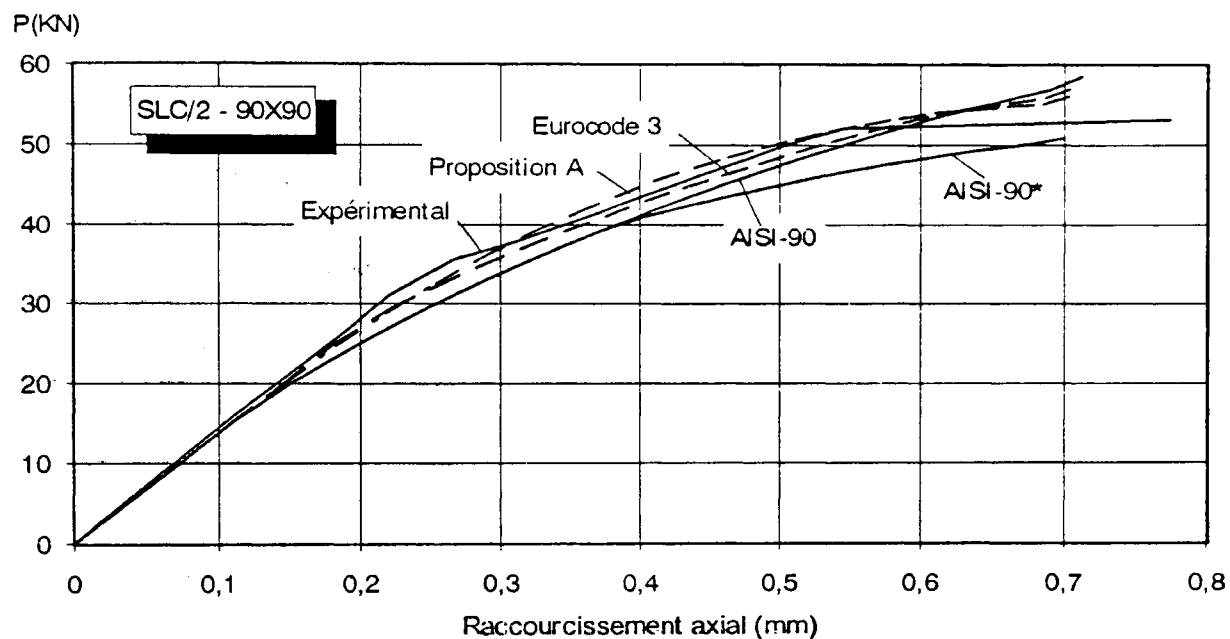


Figure A.11

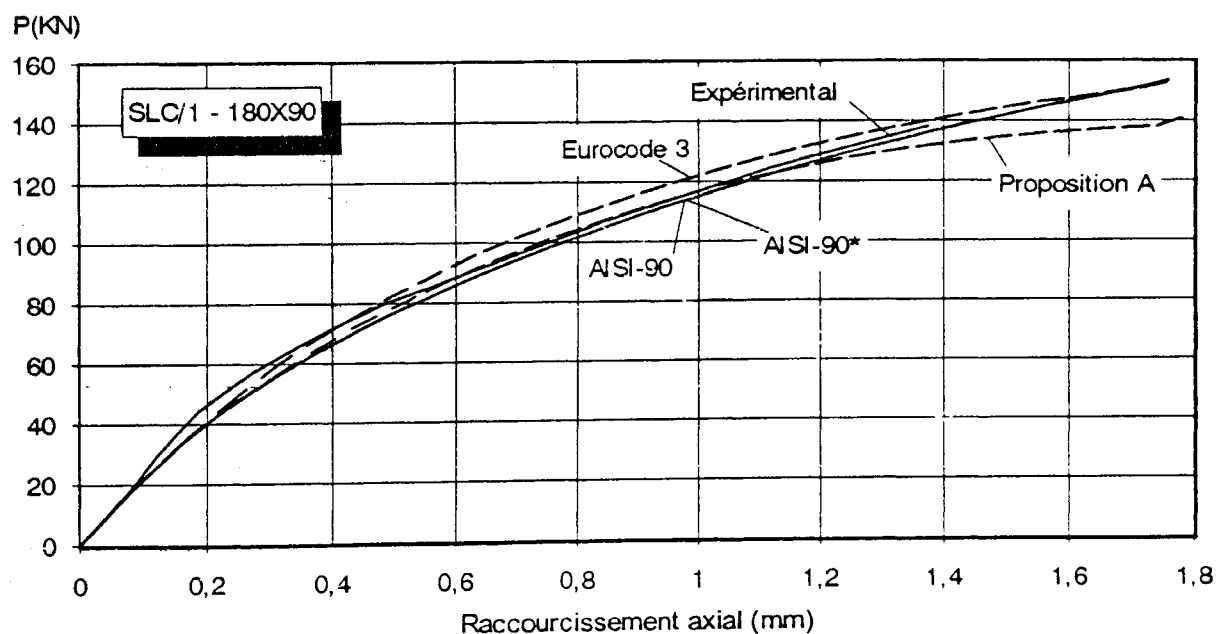


Figure A.12



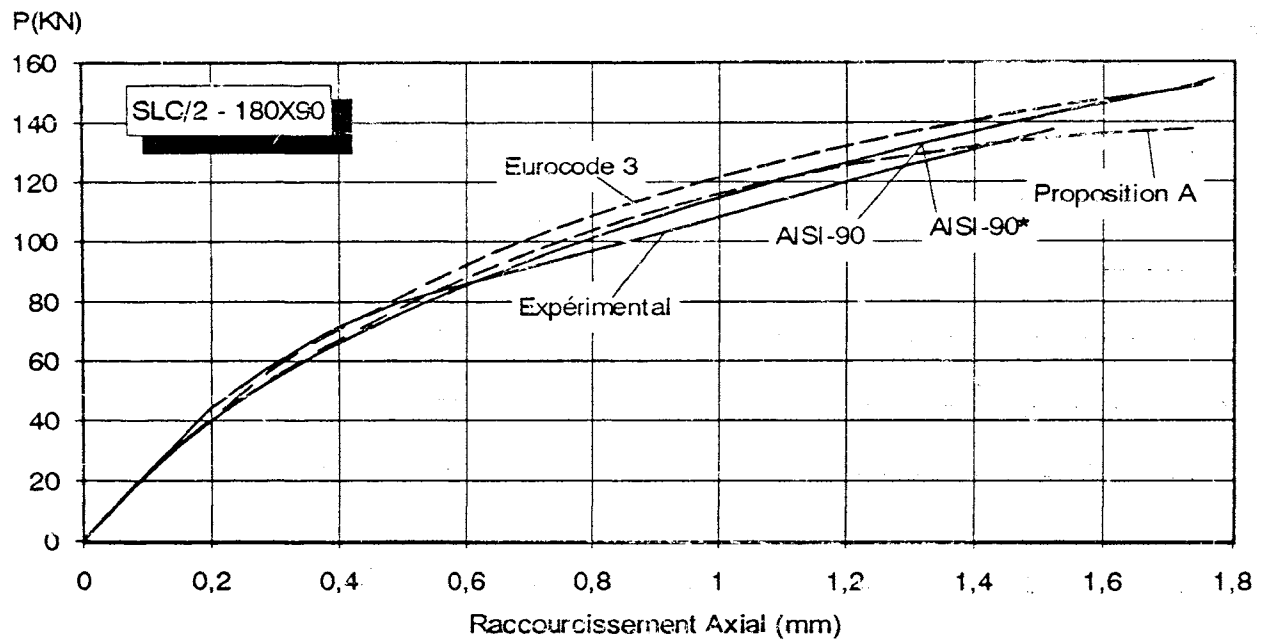


Figure A.13

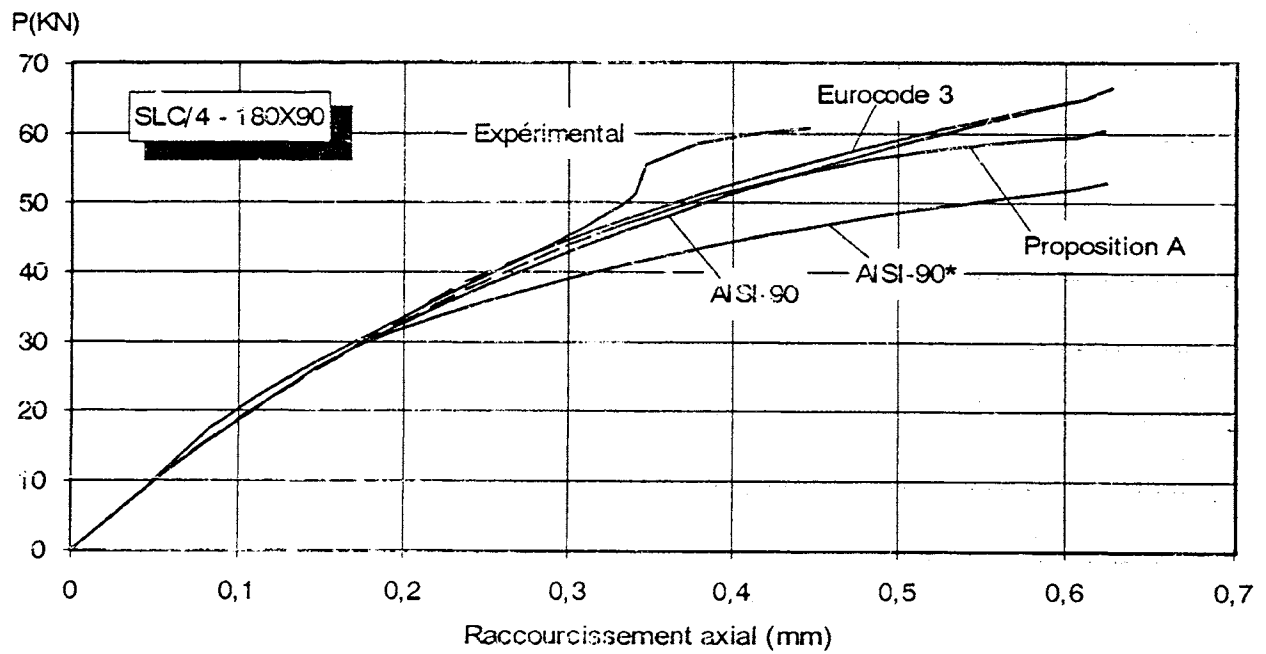


Figure A.14

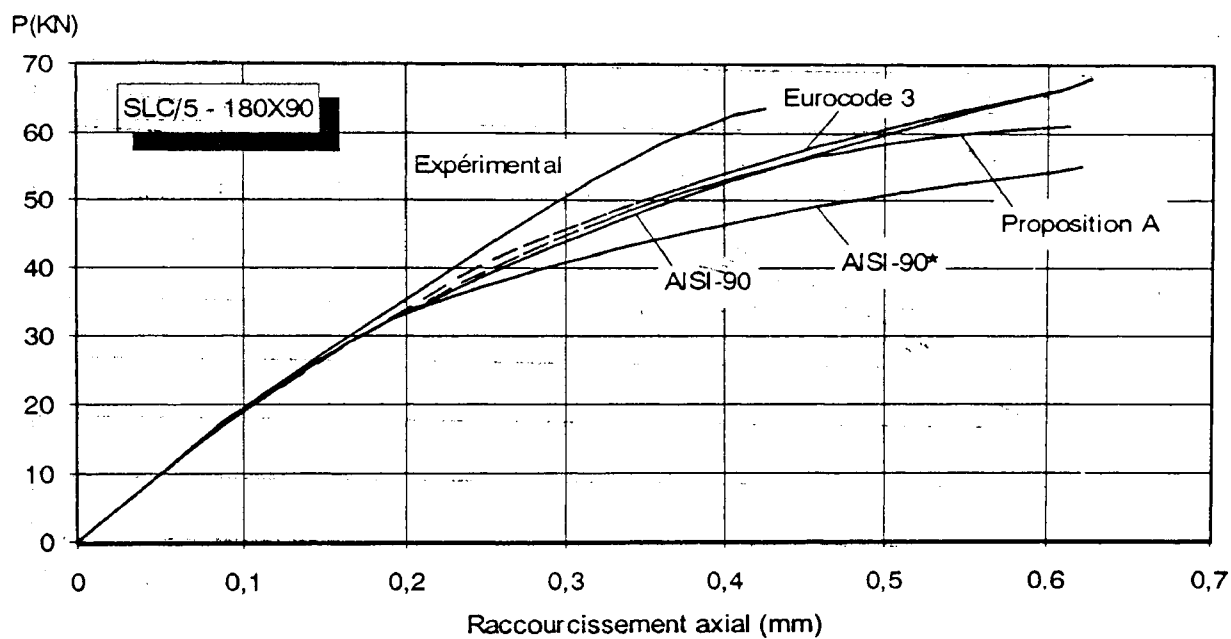


Figure A.15

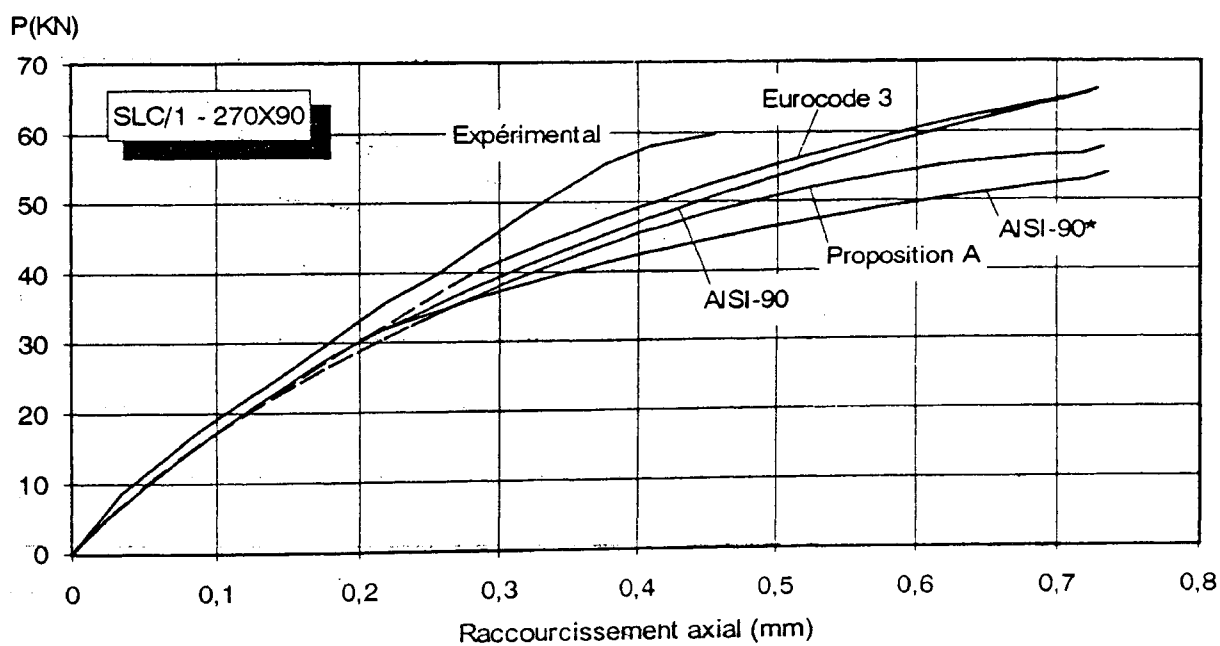


Figure A.16

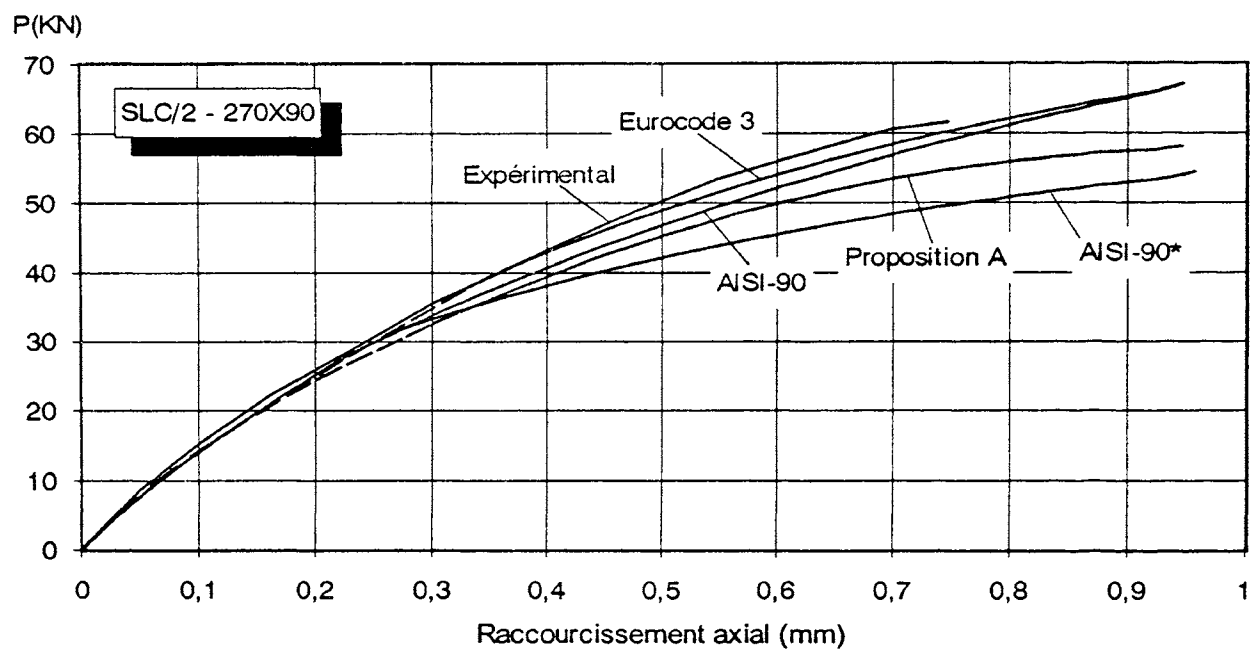


Figure A.17

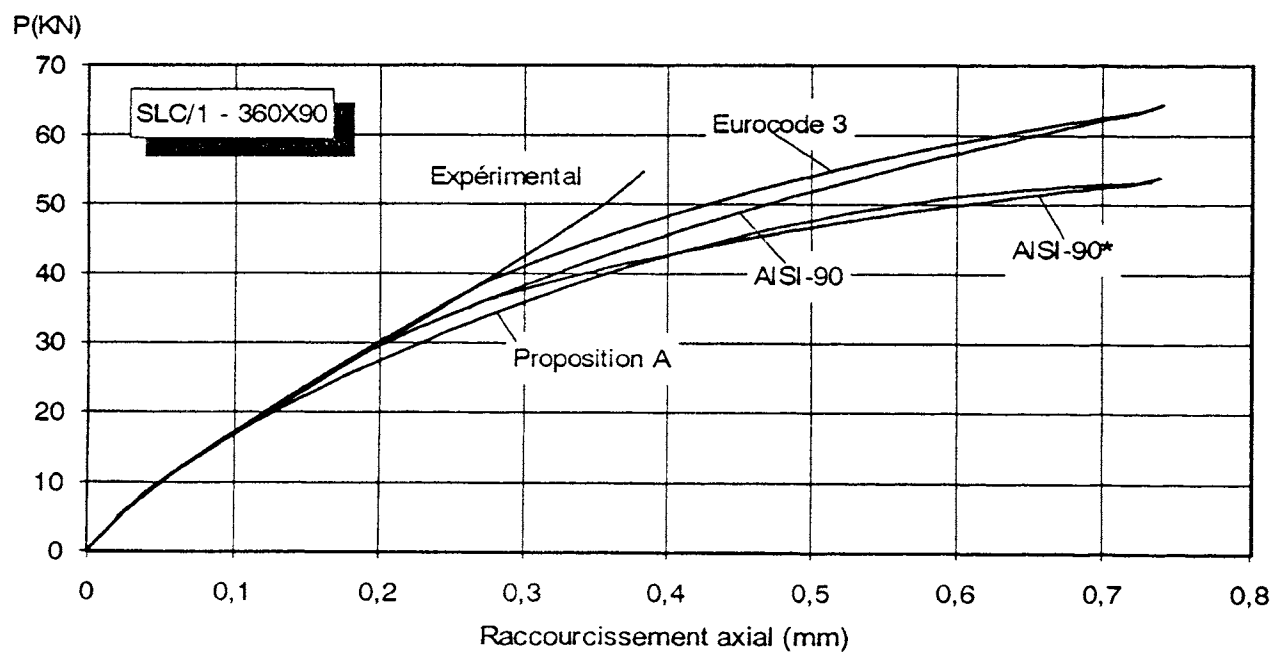


Figure A.18

